ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 63 - 8.3.2024

Equazioni lineari a coefficienti costanti.

Es $u''-2u'+u=0$

$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$ $\qquad$ $e^{\lambda x}$ è soluzione se $P(\lambda)=0$.

$u_1(x)=e^x$ è sol.

anche $u_2(x)=x e^x$ è soluzione.

Idea: penso all'operatore derivata $D: \begin{array}{c} C^n \to C^{n-1} \\ u \mapsto u' \end{array}$

$$u''-2u'+u = D^2u-2D^1u+D^0u \qquad D^0=Id.$$

$$= P(D)[u] \qquad A+B$$

$$=(D-I)^2[u]=0 \qquad (A+B)[u]=Au+Bu$$

$$=(D-I)\cdot(D-I)[u]=0 \qquad A\cdot B[u]=A[B[u]]$$

$$(t\cdot A)[u]=t(Au)$$

$(D-I)u=0 \qquad u'-u=0$

$u'=u \qquad u=c\cdot e^x.$

$(D-I)(D-I)u=0$

Devo trovare u tale che $(D-I)u = e^x$

cioè $u'-u=e^x$

$$u'e^{-x}-ue^{-x}=1$$

$$(u\cdot e^{-x})'=1$$

$$u\cdot e^{-x}=x+c$$

$$u=xe^x+\boxed{\cancel{ce^x}}$$

$u_1(x)=e^x \qquad u_2(x)=xe^x.$ $\qquad$ sono 2 sol. indipendenti.

<u>Esempio</u> Risolvere l'equazione:

$$(*) \quad u^{V} - 2u''' + u' = 0 \qquad u^{V} = u'''''$$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1)$$
$$= \lambda(\lambda^2 - 1)^2 = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$ ← radici

$m_1 = 1 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 2$ ← molteplicità

Una base di soluzioni è data da

$$\begin{cases} u_1(x) = 1 & \lambda_1 = 0 & \} m_1 = 1 \\ u_2(x) = e^x & \lambda_2 = 1 & \multirow{2}{*}{$\} m_2 = 2$} \\ u_3(x) = xe^x & \lambda_2 = 1 & \\ u_4(x) = e^{-x} & \lambda_3 = -1 & \multirow{2}{*}{$\} m_3 = 2$} \\ u_5(x) = xe^{-x} & \lambda_3 = -1 & \end{cases}$$

<u>Teorema</u>

$u_{k,\lambda}(x) = x^k e^{\lambda x}$

sono indipendenti se (k, λ) sono tutte diverse.

<u>ES</u> $\dim \operatorname{span}\{x^2 e^x, x e^x, x^7 e^{\sqrt{2} \cdot x}, e^{-x}\} = 4.$

La funzione:

$$u(x) = A \cdot 1 + Be^x + Cxe^x + De^{-x} + Exe^{-x}$$

è soluzione di $(*)$.

E l'insieme di tutte queste soluzioni è

$$\operatorname{Span}\{1, e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$$

che ha dimensione 5.

Teorema

Una eq. lineare in forma normale di ordine n ha uno spazio di soluzioni di dimensione n (massimali, su un intervallo)

$\Rightarrow$ abbiamo trovato tutte le soluzioni!

dimostriamo il Teorema!

Una eq. lineare omogenea in forma normale si scrive così:

$$(*) \quad u^{(n)} = L[u] \qquad L \text{ operatore lineare in } u, u', \dots, u^{(n-1)}$$

$$= a_{n-1}(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x) \cdot u(x)$$

con $a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$, I intervallo.
continue.

Vale il teorema di $\exists!$ globale.
Sia V l'insieme delle soluzioni di $(*)$.
Siccome L è lineare, V è uno spazio vettoriale.
Fisso $x_0 \in I$ e definisco:

$$J : V \to \mathbb{R}^n \qquad (\text{Jet})$$

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

So che il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u^{(n)} = L[u] \\ u(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases}$$

ha $\exists!$ della soluzione $u : I \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u^{(n)} = L[u] & \forall \quad u \in V \\ J(u) = \underline{y} & \underline{y} = (y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Esistenza: $\forall\ \underline{y} \in \mathbb{R}^n\ \exists\ u$ t.c. $J(u) = \underline{y}$, $u \in V$.

ovvero J è suriettiva

Unicità: se $u_1, u_2 \in V$, $J(u_1) = J(u_2)$

allora $u_1 = u_2$.

ovvero J è iniettiva.

Dunq J è bijettiva, J è lineare

$\Rightarrow$ J è un isomorfismo di spazi vettoriali.

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n. \qquad \square$$

Perché $J : V \to \mathbb{R}^n$ è lineare:

$$J(\lambda u + \mu v) = \begin{bmatrix} (\lambda u + \mu v)(x_0) \\ (\lambda u + \mu v)'(x_0) \\ \vdots \\ (\lambda u + \mu v)^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$$

---

non omogenea: prossima lezione

Se le radici di $P(\lambda)$ sono reali siamo a posto. Cosa facciamo se ci sono radici complesse?

1. Lavoriamo in campo complesso.

⚠ $u''+1=0$

$u''=-1$

$P(\lambda)=\lambda^2$ ↑

non è omogenea

(*) $u''+u=0$

$P(\lambda)=\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e^{ix} \\ u_2 &= e^{-ix} \end{aligned}\right] \text{ sono soluzioni.}$$

$u(x)=e^{\lambda x}$

$(\lambda^2+1)e^{\lambda x}=0$

<u>Osservazione</u> $De^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda=a+ib, \quad a,b\in\mathbb{R}$

$e^{\lambda x}=e^{(a+ib)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}\cdot[\cos bx+i\,\text{sen}\, bx]$

$De^{\lambda x}=a e^{ax}\cdot e^{ibx}+e^{ax}\cdot[-b\sin bx+ib\cos bx]$

$=a e^{ax}\cdot e^{ibx}+e^{ax}\cdot ib\left[\cos bx\; \underbrace{-\frac{1}{i}}_{=i}\sin bx\right]$

$=(a+ib)e^{ax}e^{ibx}=\lambda e^{\lambda x}.$

$u_1''+u_1=i^2e^{ix}+e^{ix}=(i^2+1)e^{ix}=0$

$u_2''+u_2=(-i)^2e^{-ix}+e^{-ix}=(i^2+1)e^{-ix}=0$

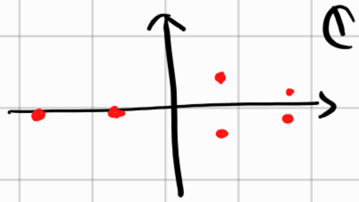
Quindi $u(x)=Ae^{ix}+Be^{-ix}$ con $A,B\in\mathbb{C}$

sono tutte (e sole) le soluzioni complesse di (*).

2. Come trovo le soluzioni reali?

Se $P(\lambda)$ ha coefficienti reali.

le radici sono $\begin{cases} \text{o reali} \\ \text{o coppie complesse coniugate} \end{cases}$



le soluzioni complesse dell'eq. diff. sono a coppie:

$$\underbrace{\begin{matrix} e^{\lambda x} & , & e^{\bar{\lambda} x} \\ \parallel & & \parallel \\ e^{\alpha x} e^{i\beta x} & & e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \end{matrix}}$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$
$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

Teo $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\alpha x} e^{i\beta x}, e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x \}$

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x$$
$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x$$

$$\Rightarrow \quad A e^{\alpha x} e^{i\beta x} + B e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x \}$$

Viceversa $\begin{cases} \cos \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \\ \sin \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases}$

$$A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\alpha x} e^{i\beta x}, e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \} \quad \square$$

Se $u = A e^{\lambda x} + B e^{\bar{\lambda} x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$

allora $u = \tilde{A} \underbrace{e^{\alpha x} \cos \beta x}_{v_1} + \tilde{B} \underbrace{e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v_2}$

Se $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x) \in \mathbb{R} \ \forall x$. ovvero

Se $u(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $\tilde{A}, \tilde{B}$ sono reali.

(per casa)

$$\begin{cases} \tilde{A} v_1 + \tilde{B} v_2 \in \mathbb{R} \\ v_1, v_2 \text{ indipendenti} \end{cases} \Rightarrow \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$$

Es $u^{V} + 2u''' + u' = 0$ ← Trovare tutte le soluzioni

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda$$
$$= \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1)$$
$$= \lambda(\lambda^2+1)^2 = \lambda(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & -i & i \\ m=1 & m=2 & m=2 \end{array}$$

Base di soluzioni reali:

$u_1 = 1$, $u_2 = \cos(x)$, $u_3 = \sin(x)$

$u_4 = x\cos(x)$ $u_5 = x\sin(x)$.
