ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 76 - 6.4.2022

Spazio metrico: X $\quad d(x,y)$

__convergenza__: $a_n \in X$, $a \in X$ $\quad a_n \to a$

se $d(a_n, a) \to 0$ per $n \to +\infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : \quad d(a_n, a) < \varepsilon$

__continuità__: $f : X \to Y$ $\quad f$ è continua in $x_0 \in X$

se (†) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\Updownarrow$

__continuità sequenziale__: se $a_n \xrightarrow{X} a$, f continua in a

(*) allora $f(a_n) \xrightarrow{Y} f(a)$.

__Oss__ la distanza $d(x,y)$ $\quad d : X \times X \to \mathbb{R}$

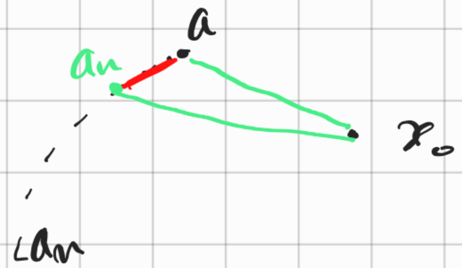
è continua in ogni variabile

$X \longrightarrow \mathbb{R}$

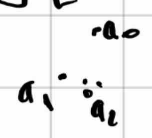
$x \mapsto d(x, x_0)$ è seq. continua.

$a_n \to a \qquad d(a_n, x_0) \xrightarrow{?} d(a, x_0)$

$|d(a_n, x_0) - d(a, x_0)| \le d(a_n, a)$



__def__ $a_n \in X$ è contraente se $\exists L < 1$ $\quad d(a_{n+1}, a_n) \le L^n$

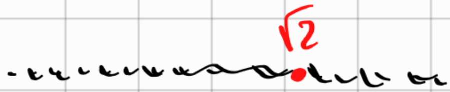


def X sp. metrico si dice essere completo se ogni succ. contraente è convergente.

Th $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ è completo

Es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è completo

$\mathbb{Q}$ non è completo



$C(X,Y) = \{ f: X \to Y : f \text{ continue} \}$ X,Y s.m.

$B(X,Y) = \{ f: X \to Y : f \text{ limitata} \}$ Y s.m.

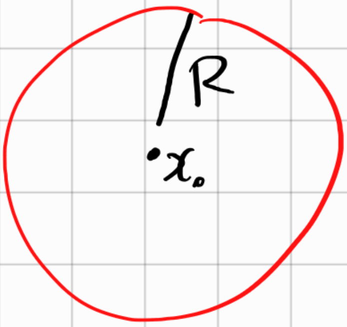
$Y = \mathbb{R}$
$X \subseteq \mathbb{R}$

Su B possiamo definire d_∞ (distanza uniforme)

$$\to d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < +\infty$$

se f,g sono limitate

$$\forall x \in X \quad d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f,g)$$

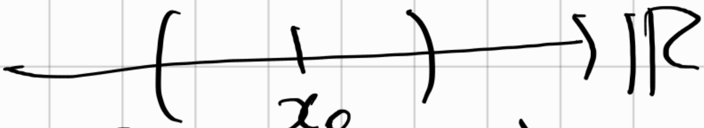


palla di raggio R centrata in x_0

$$B_R(x_0) = \{ x \in X : d(x, x_0) < R \}$$

$f: X \to Y$ è limitata se $\exists\, y_0 \in Y$ $\exists R > 0$ t.c.

$$\forall x \in X : \quad f(x) \in B_R(y_0)$$



$(x_0 - R,\ x_0 + R)$

Th Se Y è s.m. completo, X qualunque.

Allora $\mathcal{B}(X,Y)$ è completo (rispetto d_∞)

$$\underset{\displaystyle f: X \to Y}{\mathcal{B}(X,Y)}$$

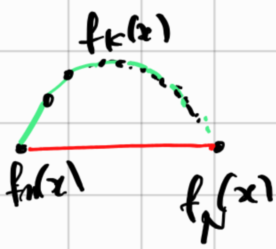
dim

Devo mostrare che se f_n è contraente (per d_∞) allora $\exists f \in \mathcal{B}$: $f_n \to f$.

f_n contraente $\Rightarrow \forall x$: $f_n(x)$ è contraente in Y

$$\downarrow$$

$$\exists f(x) \leftarrow \text{è completo}$$



$N \geq n$

$$d(f_n(x), f_N(x)) \leq \sum_{k=n}^{N-1} d(f_k(x), f_{k+1}(x)) \leq \sum_{k=n}^{N-1} L^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} L^k \leq \frac{L^n}{1-L}$$

$$N \to +\infty \downarrow$$

$$d(f_n(x), f(x))$$

$$\forall x: \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{L^n}{1-L} \leftarrow$$

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{L^n}{1-L} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$f_n \rightrightarrows f$ (converge per la distanza d_∞) $\quad d_\infty(f_n, f) \to 0$

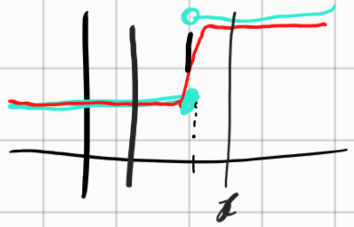
f è limitata. $\quad f \in \mathcal{B}$

Th. Se $f_n \in C(X,Y) \cap \cancel{\mathcal{B}(X,Y)}$, X sp.m. Y sp.m ~~completo~~

$$\| \quad C_b(X,Y)$$

se $f_n \rightrightarrows f \in \cancel{\mathcal{B}(X,Y)}$

allora $f \in C(X,Y)$ (è continua).



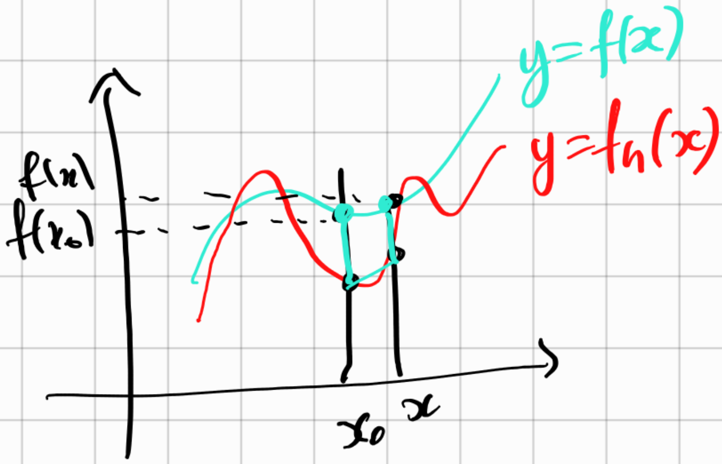
$f_n(x) \to f(x)$

$f_n \not\rightrightarrows f$

<u>dim</u> <u>Hyp.</u> f_n continue, $d_\infty(f_n, f) \to 0$

<u>Th</u> f continua.

Fisso $x_0 \in X$. Th: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \underbrace{d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon}$



$\varepsilon > 0$ mi viene dato

$\downarrow$

$$d(f(x), f(x_0)) \le d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0))$$

$$(*) \le \underbrace{d_\infty(f, f_n)} \qquad \underbrace{d(f, f_n)}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n : \; d_\infty(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$

f_n è continue in x_0: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$(*) \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \text{CVD.}$$

Corollario $C_b(X,Y)$ X sp. m. , Y sp. m. completo

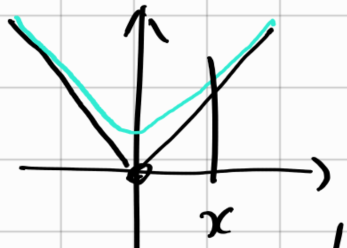
$\Rightarrow C_b(X,Y)$ è sp. m. completo

Es

$C([a,b],\mathbb{R})$ con d_∞ è completo.
$\|$
$C_b([a,b],\mathbb{R})$

Es $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

$f_n(x) \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$



$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \to f(x)$ (convergenza puntuale)

$f_n \overset{?}{\rightrightarrows} f$

$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$

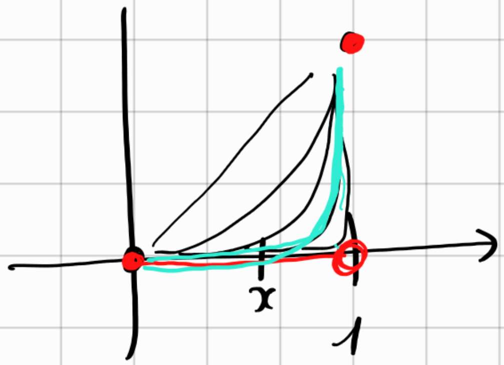
$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2}$

$= \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \leq \frac{1}{n} \to 0$

Verifico che $g_n(x) \geq 0$ ha massimo in $x = 0$.
(derivata)

Es $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = x^n$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<1 \\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$$



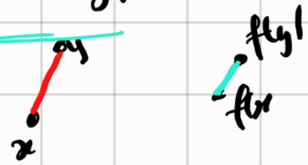
$f_n \overset{?}{\rightrightarrows} f$ No!

$d(f_n, f) = 1$

Teorema Sia X uno sp. metrico completo. $(X \neq \emptyset)$
Sia $f: X \to X$ una funzione tale che

(*) $\exists L<1 : \quad \forall x,y \in X \quad d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x,y)$.

Allora $\exists!\, p \in X : f(p) = p$.



(*) f è una contrazione

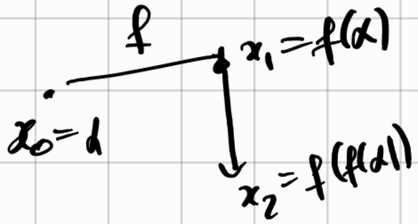
(*) f è L-lipschitz. con $L<1$.

[Banach-Caccioppoli, teorema delle contrazioni]

Es MAPPA 1:10000 $\qquad L = \frac{1}{10000}$

dim: Fisso $\alpha \in X$ qualunque.

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



$$d(x_1, x_0)$$

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq L \cdot d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq L \cdot d(x_2, x_1) \leq L^2 d(x_1, x_0)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \dots \leq L^k d(x_1, x_0) \longrightarrow 0$$

$$\exists_N \quad d(x_{N+1}, x_N) \leq 1$$

$$d(x_{N+k+1}, x_{N+k}) \leq L^k$$

x_{N+k} è contraente $\Rightarrow$ x_k è convergente

$x_k \to p \in X$ ① p è un punto fisso?

② p è l'unico punto fisso?

①
$$\begin{array}{ccc} x_{k+1} & = & f(x_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & = & f(p) \end{array}$$

f continua? $x_k \to p$

$$d(f(x_k), f(p)) \leq L \cdot d(x_k, p) \to 0$$

(2) Sia q un altro punto fisso $\begin{cases} f(q)=q \\ f(p)=p \end{cases}$

$$d(f(p), f(q)) \leq L \cdot d(p, q) \qquad L<1$$

$$d(p, q)$$

$\Rightarrow d(p,q)=0$

$p=q$ $\square$