Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

18 marzo 2019

1. Dopo aver verificato che la funzione integranda è limitata si calcoli il seguente integrale:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+\sqrt{2\pi\,|x|})}{\cos x}\,dx.$$

   Soluzione. La funzione integranda è definita e continua sull'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Per verificare che è anche limitata basterà osservare che i limiti agli estremi del dominio sono finiti: bisognerà quindi calcolare
$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+\sqrt{2\pi\,|x|})}{\cos x}.$$

   Il "numeratore" $N(x)=\cos(x+\sqrt{2\pi\,|x|})$ è derivabile con derivata continua per ogni $x\neq 0$ e si annulla per $x=\pm\frac{\pi}{2}$. Dunque si può applicare il teorema di de L'Hospital per ottenere
$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{N(x)}{\cos x} = \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{N'(x)}{-\sin x} = \frac{N'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}{\mp 1}.$$

   Tale limite è finito dunque la funzione integranda può essere estesa con continuità all'intervallo chiuso $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dove, per il teorema di Weierstrass, risulta quindi limitata. Di conseguenza l'integrale è certamente convergente.

   Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di addizione del coseno e la linearità dell'integrale:
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+\sqrt{2\pi\,|x|})}{\cos x}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cos\sqrt{2\pi\,|x|}-\sin x\sin\sqrt{2\pi\,|x|}}{\cos x}\,dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\sqrt{2\pi\,|x|}\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\sin\sqrt{2\pi\,|x|}}{\cos x}\,dx.\end{aligned}$$

Osserviamo che il secondo integrale è nullo in quanto la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico. Nel primo integrale, invece, la funzione integranda è pari e dunque possiamo ridurci a calcolare l'integrale sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dove il valore assoluto può essere semplificato. Si ha dunque

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \sqrt{2\pi\,|x|})}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sqrt{2\pi x}\,dx.$$

Quest'ultimo integrale può essere risolto facendo prima la sostituzione $y = \sqrt{2\pi x}$ da cui $dx = \frac{y}{\pi}\,dx$ e poi integrando per parti:

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sqrt{2\pi x}\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y\cos y\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}\left([y\sin y]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin y\,dy\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\,[\cos y]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

□

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \left(\sin\frac{1}{t}\right) t^{\alpha}\,(2+\cos t)\,\ln t\,dt.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni t risulta

$$1 \le 2 + \cos t \le 3$$

e visto che per $t \to +\infty$ si ha

$$t\sin\frac{1}{t} \to 1$$

esisterà un numero M tale che per ogni $t \ge M$ si abbia anche:

$$\frac{1}{2} \le t\sin\frac{1}{t} \le 2.$$

Dunque se $f(t)$ è la funzione integranda, possiamo osservare che per ogni $t \ge M$ si ha

$$\frac{1}{2}t^{\alpha-1}\ln t \le f(t) \le 6t^{\alpha-1}\ln t.$$

Se $\alpha \ge 0$ e $t > 1$ si ha inoltre

$$\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{2} \ge \frac{\ln t}{2t}$$

e integrando si ha (se $x > 1$)

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{2t}\,dt &= \left[\frac{\ln^2 t}{4}\right]_x^{x^2} = \frac{\ln^2 x^2 - \ln^2 x}{4} = \frac{4\ln^2 x - \ln^2 x}{4} \\ &= \frac{3}{4}\ln^2 x \to +\infty \qquad \text{per } x \to +\infty.\end{aligned}$$

Dunque per $\alpha \geq 0$ il limite cercato è $+\infty$.

Se invece $\alpha < 0$ sappiamo che $\frac{\ln t}{t^{-\frac{\alpha}{2}}} \to 0$ per $t \to \infty$ e quindi se t è abbastanza grande si ha

$$t^{\alpha-1}\ln t \leq t^{\alpha-1}t^{-\frac{\alpha}{2}} = t^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Sappiamo però che

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt$$

è convergente se $\frac{\alpha}{2} - 1 < -1$ cioè se $\alpha > 0$. Di conseguenza

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} t^{\alpha-1}\ln t\,dt = 0.$$

Ricapitolando, se $\alpha \geq 0$ il limite richiesto è $+\infty$, se $\alpha < 0$ il limite è $x0$. $\square$

3. Si consideri la funzione $F(x)$ così definita, per $x \neq 0$:

$$F(x) = \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2} dt.$$

Calcolare il limite di $F(x)$ per $x \to 0$ e verificare quindi che F può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$. Dire se la funzione estesa è di classe C^1.

Soluzione. Integrando per parti e poi riducendo ai fratti semplici si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{(1+t^2)\cdot t}\,dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\end{aligned}$$

Per $x \to 0$ si ha

$$\left[\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\right]_{x^2}^{3x^2} \to 1 - 1 = 0$$

dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3x^2}{\sqrt{1+9x^4}} - \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+9x^4}} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dunque la funzione F si può estendere con continuità in $x = 0$ ponendo $F(0) = \ln 3$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, quando $x \neq 0$:

$$F'(x) = \frac{\operatorname{arctg}(3x^2)}{9x^4} \cdot 6x - \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} \cdot 2x \tag{1}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2 + o(x^3)) \cdot 6x - (9x^2 + o(x^3)) \cdot 2x}{9x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0.$$

Dunque, per il teorema di de L'Hospital:

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} F'(h) = 0$$

la funzione estesa è derivabile anche in $x = 0$ e la derivata è continua in tale punto. La derivata di F è chiaramente continua anche in ogni altro punto per (1) e quindi è di classe C^1. □

Soluzione alternativa. Non è necessario trovare una primitiva della funzione integranda. Infatti essendo $\operatorname{arctg} x \sim x$ per $x \to 0$, si avrà:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt &= \lim_{x\to 0} \int_{d^2}^{3x^2} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \lim_{x\to 0} [\ln t]_{x_2}^{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \ln \frac{3x^2}{x^2} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dopodiché la dimostrazione procede come prima. □