Matematica e Statistica 2016
Prova scritta n. 1 - Risoluzione
Viticoltura ed Enologia
25 gennaio 2017

1. Definire la funzione inversa. Dare qualche criterio di invertibilità. Utilizzare i seguenti esempi:

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{3x - 7}$

   (b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 3$

   Soluzione:(*non sarò breve*)
   Nell'ambito di questo corso è superfluo definire nuovamente una funzione, dato che tutti gli argomenti trattati si basano su questo concetto; perciò si rimanda il lettore alla vastissima letteratura legata ad esso.
   Dando per scontata la definizione di *funzione* e la simbologia adottata quasi universalmente in questo ambito, diamo la definizione formale di *funzione inversa*:

   Definizione. Sia $f : A \to B$ una funzione bigettiva. Allora $\exists f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1}(f(x)) = x$. La funzione $x = f^{-1}(y)$ prende il nome di *funzione inversa* della funzione f.

   Risulta evidente come questa definizione richieda di conoscere il significato di *bigettività* di una funzione. La bigettività è una caratteristica che una funzione può avere: più precisamente è la presenza simultanea di due caratteristiche che può avere una funzione, ovvero di essere *iniettiva* e *suriettiva* (o *surgettiva*).

   Definizione. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

   In prosa, ad elementi distinti del dominio corrispondono sempre, tramite f, immagini distinte.

   Definizione. Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* (o *surgettiva*) se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A. In simboli, f è suriettiva se $\forall y \in B$ vale $f(A) = B$.

   Più informalmente, la suriettività è una proprietà di una funzione per cui non esistono elementi del codominio che non siano associati, tramite f, ad almeno un elemento del dominio.

   A questo punto deve risultare evidente come le due definizioni non si implichino l'una con l'altra né si escludano a vicenda. Infatti si possono fare infiniti esempi di funzioni inettive ma non suriettive e altrettanti per il viceversa. Se una funzione, però, presenta entrambe le caratteristiche, allora si dice *bigettiva*, ovvero gli elementi di A sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di B. Ciò significa che preso un qualsiasi elemento di B possiamo ricavare univocamente di quale elemento di A esso è immagine (il viceversa è già garantito dalla definizione stessa di funzione).

   Ciò che si è detto vale in generale, ovvero per qualsiasi insieme A e B. Vediamo ciò che interessa nel nostro caso, ovvero quando $A, B \subseteq \mathbb{R}$. L'iniettività di una funzione reale di variabile reale è certamente garantita da un'altra peculiarità che può avere una funzione, cioè di essere *monotona*. Diamo la definizione di *monotonia* di una funzione:

Definizione. Una funzione $f : A \to B$ si dice *monotona crescente* se $\forall x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in A$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.
Una funzione $f : A \to B$ si dice *monotona decrescente* se $\forall x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in A$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

Questa caratteristica è ancora più restrittiva dell'iniettività e ne è un caso particolare. Basta leggere le due definizioni per accorgersene.

Dopo questa lunga osservazione, consideriamo i risultati riguardanti la *derivata* di una funzione. C'è un rapporto stretto tra segno della derivata e monotonia. Infatti dove la derivata risulta positiva (negativa), la funzione è crescente (decrescente). Evitiamo di dilungarci su questo fatto e analizziamo i due esempi richiesti:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{3x - 7}$
Intanto notiamo che il dominio di tale funzione è tutto l'insieme dei numeri reali, cioè $D_f = \mathbb{R}$. Inoltre la radice cubica non cambia la monotonia del radicando che, come è ovvio, è una funzione lineare. Si vedrebbe ad occhio che questa funzione è strettamente monotona crescente ma facciamone comunque un piccolo studio, limitato a ciò che ci serve per l'invertibilità. Vediamo il codominio, necessario per indagare sulla suriettività della funzione:
innanzitutto notiamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (vedere e studiare a fondo la definizione di continuità). Agli estremi del dominio abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{3x - 7} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{3x - 7} = +\infty$$

Per il *teorema dei valori intermedi*, la funzione assumerà tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$: questo fatto ci garantisce la suriettività della funzione.
Ora deriviamo f:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x - 7)^2}}$$

Studiamone il segno, che ci darà gli intervalli di monotonia:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3x - 7)^2}} > 0$$

In questo caso, il numeratore non dipende da x e per questo non si annulla mai (f non ha punti stazionari); solo il denominatore contiene la variabile x ma risulta comunque sempre positivo, eccetto che nel punto $x = \frac{7}{3}$, dove è nullo e quindi la derivata non è definita. Facendo i limiti destro e sinistro della derivata per $x \to \frac{7}{3}$ troviamo che la derivata tende a $+\infty$. Siamo in presenza di un flesso a tangente verticale ascendente. Certamente f non è derivabile in $x = \frac{7}{3}$ ma è continua in tale punto ed è (più che mai) crescente anche in un intorno di tale valore. Essendo la derivata positiva in tutto il dominio, allora la funzione risulterà strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}$.
Abbiamo la monotonia (quindi l'iniettività) e la suriettività, quindi la bigettività. Allora sicuramente esiste la funzione inversa, e in questo caso risulta anche facile determinarne l'espressione analitica:

$$y = \sqrt[3]{3x - 7} \to y^3 = 3x - 7 \to 3x = y^3 + 7 \to x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{7}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{7}{3}$$

Come usuale, riscriviamo l'inversa di f come funzione di x, ponendo $g = f^{-1}$:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}$$

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 3$
Questa funzione è una razionale intera. Si tratta di una funzione polinomiale di terzo grado. Il suo dominio è $D_f = \mathbb{R}$ ed è continua su tutto $\mathbb{R}$. Agli estremi del dominio valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(2 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3}\Big) = -\infty$$

Con un procedimento analogo otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = +\infty$$

Sempre ricorrendo al teorema dei valori intermedi abbiamo la suriettività. Come ormai chiaro, cerchiamo la monotonia; se essa fosse garantita $\forall x \in \mathbb{R}$ allora avremmo l'invertibilità. Deriviamo la funzione ottenendo:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$$

Studiamone il segno:

$$6x^2 + 6x + 6 \geq 0 \;\to\; 6(x^2 + x + 1) \geq 0 \;\to\; x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Essendo il discriminante negativo, il trinomio di secondo grado x^2+x+1 non si annulla mai. Quindi ha sempre lo stesso segno, in particolare quello del coefficiente di x^2. La derivata è strettamente positiva, quindi la funzione è strettamente crescente (non ha nemmeno punti di flesso a tangente orizzontale, dato che la derivata non si annulla mai). Per questo motivo la funzione è invertibile su tutto $\mathbb{R}$ ma evitiamo in questa sede (e non sarebbe stato richiesto per l'esame) di provare a trovare l'espressione analitica dell'inversa.

2. Cosa significa che due eventi sono indipendenti? Cosa significa che due variabili aleatorie sono indipendenti? Fornire degli esempi.

Soluzione:
Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Questa definizione non è da confondere con la definizione di eventi *incompatibili*, ovvero A e B sono incompatibili se $P(A \cap B) = 0$. L'indipendenza tra eventi è una caratteristica più particolare e ne risulta più chiaro il concetto se lo leghiamo alla *probabilità condizionata.* Secondo definizione la probabilità di un evento A condizionata all'evento B, in simboli $P(A|B)$, è la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato l'evento B.
Vale, per definizione

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se A e B sono indipendenti allora l'equazione sopra scritta diventa

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

ovvero la probabilità che si verifichi A condizionata al verificarsi di B è uguale alla probabilità del solo evento A, quindi il verificarsi dell'evento A è *indipendente* dal fatto che B si sia verificato o meno. Questo giustifica la definizione data di indipendenza tra eventi. Vediamo un caso semplice ed esemplificativo.

Un'urna contiene 2 palline bianche e 10 nere. In un'altra urna ci sono 8 palline bianche e 4 nere. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Ci chiediamo la probabilità che le due palline estreatte siano bianche.
Gli eventi in gioco sono:
$A = \{$estrazione di una pallina bianca dalla prima urna$\}$
$B = \{$estrazione di una pallina bianca dalla seconda urna$\}$
É facile calcolare le rispettive probabilità:

$$P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Ciò che vogliamo calcolare è $P(A \cap B)$. In questo caso gli eventi A e B sono indipendenti, infatti il verificarsi dell'uno non influenza il verificarsi dell'altro. Per questo possiamo scrivere direttamente

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Potevamo anche ragionare in modo diverso, calcolando la probabilità dell'intersezione in modo diretto e poi mostrare che essa è uguale al prodotto delle probabilità di ciascun evento. Questo è lasciato per esercizio, considerando, per iniziare, che il numero di casi favorevoli è dato dal prodotto $2 \cdot 8$ (perché?).

Veniamo ora alla definizione di *variabili aleatorie indipendenti*: per definizione, due variabili aleatorie sono indipendenti se presi comunque due numeri a e b vale che la probabilità congiunta è data da

$$P\big(\{X = a, Y = b\}\big) = P\big(\{X = a\}\big) \cdot P\big(\{Y = b\}\big)$$

Come esempio, pensiamo a un dado a 6 facce lanciato due volte. La probabilità che esca un 5 al primo lancio e un 2 al secondo (casi esemplificativi) si trova, con uno studio mediante variabili aleatorie, in questo modo:
la v.a. discreta X è il risultato del lancio, quindi può assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5 e 6. La probabilità associata a ciascuno di questi casi è, ovviamente, uguale a $\frac{1}{6}$ (*distribuzione uniforme di probabilità*). Consideriamo X_1 per il primo lancio e X_2 per il secondo. Analogamente al caso di eventi indipendenti, anche le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti, quindi la probabilità richiesta è data da

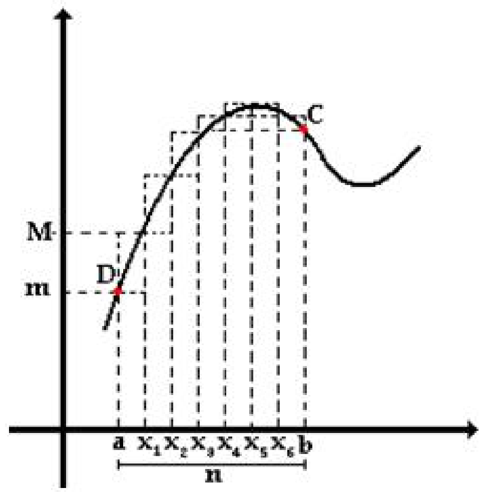
$$P\big(\{X_1 = 5, X_2 = 2\}\big) = P\big(\{X_1 = 5\}\big) \cdot P\big(\{X_2 = 2\}\big) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

3. Qual è il significato geometrico dell'integrale? Dare, ad esempio, significato al seguente

$$\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}dx.$$

Soluzione:
Ricordiamo velocemente e in modo molto semplice l'idea che porta alla definizione di *integrale definito* di una funzione f in un intervallo $[a, b]$: se suddividiamo l'intervallo in n parti uguali, quindi di lunghezza $\Delta l = \frac{b-a}{n}$, andiamo a trovare l'area dei rettangoli che hanno per base Δl e come altezza il valore che la funzione assume o all'estremo sinistro o all'estremo destro di tale piccolo intervallino. Sommando tutte le aree di ogni rettangolo (di altezza data

dal valore della funzione assunto nell'uno o nell'altro estremo di ogni piccolo intervallo), otteniamo un'approssimazione del valore dell'area compresa tra il grafico della funzione e dall'asse x.



Risulta evidente che tale approssimazione diventa sempre più precisa quanto più si infittisce il numero di intervallini, ovvero facendo tendere all'infinito il numero n in cui si suddivide l'intervallo $[a, b]$. Inoltre tendono ad avere lo stesso valore le aree costruite con le altezze date dal valore della funzione nell'estremo sinistro degli intervallini e nell'estremo destro. Entrambe tendono, una dall'alto e una dal basso, al valore dell'area compresa tra il grafico di f e l'asse x. Ovviamente tale area può assumere valori negativi, positivi o nulli.
Una parafrasi ben scritta di questo ultimo trafiletto, corredata da un grafico che mostri l'idea enunciata, sarebbe stata sufficiente a rispondere alla domanda.

Dedichiamoci ora al calcolo dell'integrale proposto

$$\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2} dx$$

Usiamo però due modi differenti:

- notiamo subito che tipo di funzione è l'integrando:
  riscrivendola in questo modo

  $$y = \sqrt{25 - x^2}$$

  possiamo accorgerci che si tratta di una semicirconferenza. Vediamola meglio:

  $$y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

  che si deve riconoscere essere una circonferenza con centro nell'origine e di raggio 5. L'integrando rappresenta solo la semicirconferenza superiore; capire questo fatto è lasciato per esercizio.
  A questo punto, notando che l'intervallo di integrazione risulta proprio il dominio della funzione e che, quindi, prende tutta la semicirconferenza, l'area sottesa dal grafico della funzione e l'asse delle x è l'area di un semicerhio di raggio 5, ovvero

  $$\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{\pi 5^2}{2} = \frac{25}{2}\pi$$

- Risolviamo l'integrale in modo diretto (utilizzando implicitamente i teoremi che devono essere arcinoti):
  questa risoluzione è piuttosto classica e la si può trovare in svariati testi che trattano l'argomento. Si fa prima di tutto una sostituzione:

  $$x = 5\sin t \implies dx = 5\cos t dt$$

  Avendo riscalato le x, cambiano anche gli estremi di integrazione:

  $$-5 = 5\sin t \to \sin t = -1 \to t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

  Tra le infinite soluzioni di questa equazione (tutte quelle al variare di k), scegliamo $t = -\frac{\pi}{2}$, quindi quella che si ottiene per $k = -1$.

  $$5 = 5\sin t \to \sin t = 1 \to t = \frac{\pi}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

  Tra queste scegliamo $t = \frac{\pi}{2}$, in modo che l'intervallo rimanga simmetrico rispetto all'origine anche nella variabile t.
  Abbiamo allora:

  $$\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\sin^2 t} \cdot 5\cos t dt$$

  Svolgiamo quindi tutti i passaggi necessari, ricordando anche l'identità goniometrica fondamentale

  $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

  e l'integrale indefinito

  $$\int \cos x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c$$

  Quindi:

  $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\sin^2 t} \cdot 5\cos t dt = 5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25(1 - \sin^2 t)} \cdot \cos t dt =$$

  $$= 5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt =$$

  $$= 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 25\Big[\frac{t + \sin t \cos t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

  $$25\Big(\frac{\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{-\frac{\pi}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\Big) = 25\frac{\pi}{2} = \frac{25}{2}\pi$$

  dove abbiamo considerato anche che $\cos(x) \geq 0$ in $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, per cui $\sqrt{\cos^2(x)} = \cos(x)$ in I, altrimenti avremmo dovuto porre il segno meno (considerazione necessaria, in particolare sarebbe stata determinante se avessimo scelto estremi di integrazione diversi).
  Ovviamente il risultato trovato è lo stesso di prima.

4. Fare esempi dei seguenti tipi di serie: convergente, divergente, indeterminata.
   Soluzione:
   Data una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, la somma

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

è detta *serie numerica* associata alla successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che è chiamata, in questo contesto, *termine* della serie; a_n si dice *termine generale* della serie. Per dare un significato alla somma infinita scritta prima, consideriamo le *somme parziali*

$$s_1 = a_1; \quad s_2 = a_1 + a_2; \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

dove $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prende il nome di *successione delle somme parziali.* Ora possiamo dare una definizione più precisa di serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} s_n$$

Il *carattere (o comportamento) della serie* è dato dai seguenti casi:

- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = L$ con L finito, allora la serie si dice *convergente.*
- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ positivamente o negativamente, allora la serie si dice *divergente.*
- se il limite della successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non esiste, allora la serie si dice *indeterminata.*

Non discuteremo le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di una serie e nemmeno criteri per determinarne il carattere, ma ci limiteremo a dare i tre esempi richiesti mostrando in modo intuitivo, seppur corretto e formale, il motivo del loro comportamento.

Analizziamo la *serie geometrica di ragione* q, con $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

al variare di q essa ha andamenti diversi. Studiamo i vari casi:

- se $|q| > 1$, ovvero $q < -1 \vee q > 1$, vale che

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

  pertanto la serie diverge
- se $|q| < 1$, ovvero $-1 < q < 1$, vale che

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

  Inoltre vale[1]

  $$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

[1]dimostriamolo brevemente

$$s_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \quad \to \quad \frac{s_n}{q} - 1 = q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ora il II membro è s_{n-1} e vale $s_{n-1} = s_n - q^n$, quindi

$$\frac{s_n}{q} - 1 = s_n - q^n \quad \to \quad \frac{s_n}{q} - s_n = 1 - q^n \quad \to \quad s_n\Big(\frac{1-q}{q}\Big) = 1 - q^n$$

$$\Longrightarrow s_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

Passando al limite

$$\lim_{n\to+\infty} q\frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{q}{1-q}$$

poichè $q^{n+1} = q \cdot q^n$ che avevamo già visto tendere a zero per $n \to +\infty$. Pertanto la serie converge ed abbiamo anche calcolato a quale valore.

- se $q = 1$ si ha $s_n = 1 + 1 + 1 \cdots + 1 = n$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

  Per cui la serie diverge.

- se $q = -1$ si ha che $s_n = -1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \ldots$ quindi il suo andamento dipende da n, se n è pari il valore è 0, se n è dispari allora vale -1. Questo ci permette di dire che il limite di s_n non esiste, pertanto la serie è indeterminata.

Gli esempi potevano essere presi dai casi (noti dalla teoria) sopra mostrati. Un esempio di serie convergente è la serie geometrica di ragione $q = \frac{4}{5} < 1$, che rientra proprio nelle condizioni per cui essa è convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}\cdot 5 = 4$$

Una serie geometrica divergente può essere, ad esempio, quella di ragione $q = 2$: essendo $q > 1$ ora sappiamo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = +\infty$$

Infine una serie con comportamento alternato è data dalla serie geometrica di ragione $q = -1$, per cui questo bastava e avanzava per fornire tre esempi di tali tipi di serie.

Di esempi di serie numeriche con i tre caratteri esistenti (quelli richiesti) se ne possono fare una marea. Come si capisce da quelli forniti, bastava dare un'occhiata alle serie canoniche che si studiano usualmente. Si rimanda il lettore ai vari testi di analisi, sperando che non pensi che questo argomento si esaurisca con questi tre piccoli e semplici esempi.