COMPITO 17/1/2011

SOLUZIONI

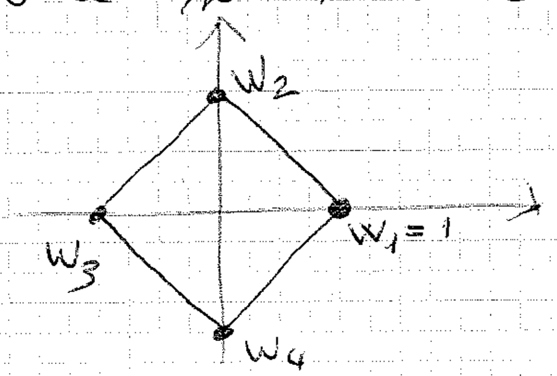
ES. 1A

Risolvere $(z-3)^4 = 1$

Posto $w = z-3$ si ha

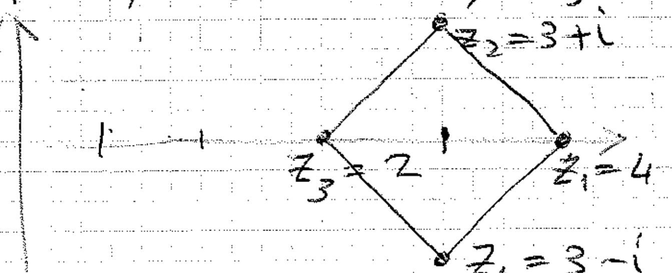
$$w^4 = 1$$

è una equazione con 4 soluzioni poste ai vertici di un quadrato centrato in (0,0). Una soluzione è $w_1 = 1$ dunque:



le altre soluzioni sono $w_2 = i$, $w_3 = -1$, $w_4 = -i$.
Ricordando che $z = w+3$ le quattro soluzioni dell'equazione originaria sono:

$$z_1 = 4, \quad z_2 = 3+i, \quad z_3 = 2, \quad z_4 = 3-i.$$



1B $z_1 = -2$, $z_2 = -3+i$, $z_3 = -4$, $z_4 = -3-i$

1C $z_1 = 3$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = 1$, $z_4 = 2-i$

1D $z_1 = -1$, $z_2 = -2+i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -2-i$

$\boxed{\text{ES 2A}}$ Determinare il numero di soluzioni dell'equazione:

$$6x^8 = x^6 + 1.$$

Posto
$$f(x) = 6x^8 - x^6 - 1$$
dobbiamo determinare il numero di zeri di f.

Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 48x^7 - 6x^5 = 6x^5(8x^2 - 1)$$

Il segno di $f'(x)$ è dato da:

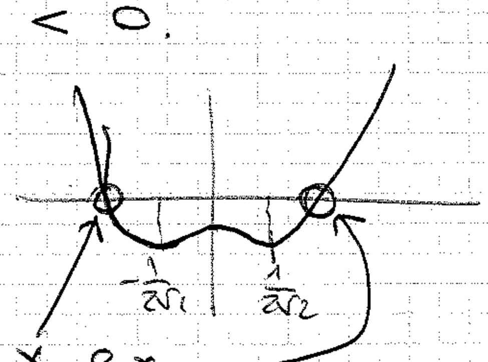
x		$-\frac{1}{2\sqrt2}$		0		$\frac{1}{2\sqrt2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(0) = -1 < 0$

$$\cancel{f(\pm 2\sqrt2) = 6\cdot 8^4 - 8^3 - 1 = 8^3(48-1) - 1}$$
$$\cancel{= 47\cdot 8^3 - 1 > 0}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{2\sqrt2}\right) = 6\cdot\frac{1}{8^4} - \frac{1}{8^3} - 1 = \frac{6-8}{8^4} - 1$$
$$= -\frac{2}{8^4} - 1 < 0.$$

Il grafico approx è:



L'equazione ha 2 soluzioni x_1 e x_2

con $x_1 < -\frac{1}{2\sqrt2}$, $x_2 > \frac{1}{2\sqrt2}$.

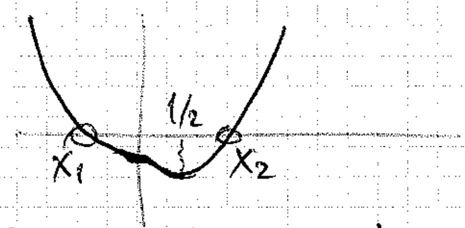
ES 2B È simile a **2A**. Ma:

$$f(x) = 5x^8 - x^5 - 1$$

$$f'(x) = 40x^7 - 5x^4 = 5x^4(8x^3 - 1)$$

x		0		$1/2$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	flesso	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1/2) < f(0) < 0.$$



Ci sono 2 soluzioni $x_1 < 0$, $x_2 > \frac{1}{2}$

ES 2C $f(x) = 6x^8 - x^6 - 2$

È simile a **2A**. Ma:

$$f(0) = -2 < 0, \quad f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) < f(0) < 0.$$

ES 2D $f(x) = 5x^8 - x^5 - 2$

È simile a **2B**. Ma $f(0) = -2$.

$\boxed{\text{ES 3 A}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-\cos x)^3 - x^6}{\log^4(1+x^2)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$(1-\cos x)^3 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\left(\frac{x^4}{24}\right) + o(x^8)$$

$$= \frac{x^6}{8} - \frac{1}{32}x^8 + o(x^8).$$

$$8(1-\cos x)^3 - x^6 = 8\left(\cancel{\frac{x^6}{8}} - \frac{x^8}{32} + o(x^8)\right) - \cancel{x^6}$$

$$= -\frac{x^8}{4} + o(x^8).$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\log^4(1+x^2) = \left(x^2 + o(x^2)\right)^4 = x^8 + o(x^8).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-\cos x)^3 - x^6}{\log^4(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^8}{4} + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = -\frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{ES 3B}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x - x^4}{\log^3(1+x^2)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin^4 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4$$

$$= x^4 - 4 x^3 \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^6)$$

$$= x^4 - \frac{4}{6} x^6 + o(x^6)$$

$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2) \qquad (\text{VEDI } \boxed{A})$$

$$\log^3(1+x^2) = \left(x^2 + o(x^2)\right)^3 = x^6 + o(x^6).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x - x^4}{\log^3(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4} - \frac{4}{6}x^6 + o(x^6) - \cancel{x^4}}{x^6 + o(x^6)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{6} + \overbrace{\frac{o(x^6)}{x^6}}^{0}}{1 + \underbrace{\frac{o(x^6)}{x^6}}_{0}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$\boxed{3C} = \boxed{3A}$

$\boxed{3D} = \boxed{3B}$

$\boxed{\text{ES 3C}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8(1-\cos x)^3 - x^6}{\log^4(1+x^2)}$$

$\boxed{\text{ES 4A}}$ Punti critici di

$$f = \frac{x^2 - y}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(1+\cancel{x^2}+y^2) - (\cancel{x^2}-y)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x + 2xy^2 + 2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(1+x^2+y^2) - (x^2-y)\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^2 + y^2 - 2x^2 y}{(\quad)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(1+y^2+y) = 0 \\ -1-x^2+y^2-2x^2y = 0 \end{cases}$$

$1+y^2+y=0 \quad \Delta = 1-4<0 \quad$ MAI

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -1 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Abbiamo 2 punti critici: $(0,1)$, $(0,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + 2xy^2 + 2xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1 - x^2 + y^2 - 2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(2+2y^2+2y)(1+x^2+y^2)^2 - (2x+2xy^2+2xy)2(1+x^2+y^2)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^4}$$

(Con $x=0$, $y=\pm 1$)

$$= \frac{(2+2\pm 2)(2)^2 - 0}{2^4} = \frac{(4\pm 2)\cdot 4}{16}$$

$$= \frac{2\pm 1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(4xy+2x)(1+x^2+y^2)^2 - (2x+2xy^2+2xy)2(1+x^2+y^2)2y}{(1+x^2+y^2)^4}$$

(Con $x=0$, $y=\pm 1$)

$$= \frac{0 - 0}{2^4} = 0$$

(Continua es 4A)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(2y - 2x^2)(1+x^2+y^2)^2 - (-1 - x^2 + y^2 - 2x^2 y)\,2(1+x^2+y^2)\,2y}{(1+x^2+y^2)^4}$$

(con $x=0$, $y=\pm 1$)

$$= \frac{(\pm 2)(2)^2 - 0}{(2)^4} = \frac{\pm 8}{16} = \pm\frac{1}{2}$$

$$D^2 f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} \frac{2\pm 1}{2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

MINIMO   SELLA

ES 4B | 4C | 4D sono molto simili a **4A**.

4B (0,1) SELLA, (0,−1) MINIMO

4C (1,0) MAX, (−1,0) SELLA

4D (1,0) SELLA, (−1,0) MINIMO