

Analisi Matematica 1

Prova scritta n. 5

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

25 gennaio 2010

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}, \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il limite della successione.

2. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{1 + e^{(t^2)}} dt.$$

In particolare verificare che la funzione $F(x)$ ha gli asintoti orizzontali $y = \pm q$ e dimostrare che $|q| \leq \pi$.

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} - \frac{\cos x}{x^4}$$

4. Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1 - \sqrt{e^x}}}.$$

5. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}}{(3n)!}.$$