Analisi Matematica Due
Soluzioni della prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

11 luglio 2002

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+|y|} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Dire se f è continua e se è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Dimostriamo che f è continua nel punto $(0,0)$ stimando il rapporto incrementale:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|xy|}{|y|} \leq |x|.$$

(notiamo che il primo passaggio è valido solo per $y \neq 0$, ma per $y = 0$ si ha $f(x,y) = 0$ e quindi il risultato è comunque valido). Siccome $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$ si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - f(0,0) = 0$ e quindi la funzione è continua nel punto $(0,0)$.

Dimostriamo invece che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$. Essendo $f(x,0) = 0$ e $f(0,y) = 0$ la funzione è derivabile in $(0,0)$ con derivate parziali $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. Dunque se la funzione fosse differenziabile in $(0,0)$ dovrebbe valere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Questo è impossibile in quanto, per $x = y$, si ottiene

$$\frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}(x^2+|x|)|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+|x|)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = y\cos x - \arctan y.$$

   (a) Studiare i punti critici di f.

(b) Posto $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ determinare l'insieme $f(D)$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -y \sin x \\ f_y(x, y) = \cos x - \frac{1}{1+y^2}. \end{cases}$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$. Perché sia $f_x = 0$ deve essere o $y = 0$ oppure $\sin x = 0$. Se $y = 0$ dall'equazione $f_y = 0$ troviamo $\cos x = 1$. Se invece $\sin x = 0$ allora $\cos x = \pm 1$. Ma dovendo essere $f_y = 0$ bisogna scartare il caso $\cos x = -1$ (impossibile) e da $\cos x = 1$ si ottiene di nuovo $y = 0$. Dunque i punti critici sono i punti $(2k\pi, 0)$ con k intero. Essendo la funzione in questione 2π-periodica rispetto alla variabile x, tutti questi punti critici hanno la stessa natura e sarà dunque sufficiente studiare il punto critico $(0, 0)$. Si può verificare che in $(0, 0)$ la matrice delle derivate seconde ha determinante Hessiano nullo, e quindi non risulta utile per capire la natura del punto critico. Consideriamo la restrizione di f all'asse delle y: $g(y) = f(0, y) = y - \arctan y$. Da un rapido studio di g notiamo che $g(y) > 0$ per $y > 0$ e $g(y) < 0$ per $y < 0$. Dunque $y = 0$ non è né punto di massimo né di minimo locale per g. A maggior ragione $(0, 0)$ non può essere né massimo né minimo locale per f.

Cerchiamo ora di determinare l'insieme $f(D)$. Essendo D un insieme connesso di $\mathbb{R}^2$, ed essendo f una funzione continua sappiamo che $f(D)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ e dunque è un intervallo. Essendo inoltre la funzione data 2π-periodica rispetto alla variabile x, possiamo dedurre che $f(D) = f(K)$ dove $K = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ è un rettangolo. Per il teorema di Weierstraß f ammette massimo e minimo su K e dunque ammette anche massimo e minimo su D.

Siccome f non ha massimi e minimi locali, il massimo e il minimo di f su D si troveranno sul bordo ∂D; dunque sarà sufficiente studiare f sulle due rette $y = \pm 1$. Si ha $f(x, \pm 1) = \pm(\cos x - \frac{\pi}{4})$ e dunque il valori massimo e minimo assunti si avranno per $\cos x = -1$ e saranno $1 + \frac{\pi}{4}$ e $-1 - \frac{\pi}{4}$.

Concludiamo quindi che $f(D) = [-1 - \frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{4}]$.

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 2xy - 4xy^2.$$

Soluzione. È una equazione di Bernoulli. Notiamo innanzitutto che $y = 0$ è soluzione. Per il teorema di esistenza e unicità ogni altra soluzione sarà sempre diversa da 0. Dunque, esclusa la soluzione 0, posso dividere l'equazione per y^2 ottenendo: $y'/y^2 = 2x/y - 4x$. Posto $z = 1/y$ si ha $z' = -y'/y^2$ e l'equazione diventa

$$z' + 2xz = 4x$$

che è una equazione lineare del primo ordine. Moltiplicando ambo i membri per e^{x^2} si ottiene $z'e^{x^2} + z(e^{x^2})' = 2(e^{x^2})'$ cioè

$$(ze^{x^2} - 2e^{x^2})' = 0.$$

Dunque si avrà $ze^{x^2} - 2e^{x^2} = c$ per qualche costante c, da cui $z = ce^{-x^2} + 2$. Risostituendo $y = 1/z$ si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{ce^{-x^2} + 2}$$

che insieme a $y = 0$ descrive tutte le soluzioni (definite su un intervallo) dell'equazione differenziale data.

Soluzione alternativa. Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y' = 2xy(1 - 2y)$$

si nota che è a variabili separabili. Notiamo innanzitutto che $y = 0$ e $y = 1/2$ sono soluzioni dell'equazione. Per il teorema di esistenza e unicità ogni altra soluzione sarà sempre diversa da 0 e da 1/2. Dividendo per $y(1 - 2y)$ si ottiene

$$\frac{y'}{y(1 - 2y)} = 2x.$$

Scomponendo $\frac{1}{y(1-2y)} = \frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}$ si nota che $(\log|y| - \log|1 - 2y|)' = \frac{y'}{y(1-2y)}$. Dunque

$$\log\left|\frac{y}{1 - 2y}\right| = x^2 + c_1.$$

Dunque

$$\frac{y}{1 - 2y} = \pm e^{x^2 + c_1} = c_2 e^{x^2} \qquad (c_2 = \pm e^{c_1} \neq 0).$$

Risolvendo si ottiene $y + 2yc_2 e^{x^2} = c_2 e^{x^2}$ da cui si ottiene

$$y = \frac{c_2 e^{x^2}}{1 + 2c_2 e^{x^2}} = \frac{1}{c_3 e^{-x^2} + 2} \qquad (c_3 = \frac{1}{c_2} \neq 0).$$

4. Calcolare l'area del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle parabole di equazioni $x = y^2$, $x = 3y^2$ e dalle iperboli di equazioni $xy = 1$, $xy = 4$.

   Soluzione. L'insieme D di cui si vuole calcolare l'area può essere scritto come segue

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 3\}.$$

   Dunque con il cambio di variabili

   $$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

si ottiene che

$$Area(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_R \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

dove R è il rettangolo $[1,4] \times [1,3]$.
Invertendo il cambio di variabili si ha

$$\begin{cases} x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} v^{-1}.$$

Tornando all'integrale doppio si ha dunque

$$Area(D) = \frac{1}{3} \int_1^3 \int_1^4 \frac{1}{v}\, du\, dv = \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv = \log 3.$$