Compito di Analisi II/A

20 gennaio 1998

1. *Trovare la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x' + \frac{2x}{\sin 2t} + \frac{1}{2\cos^2 t} = 0 \\ x(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

<u>Soluzione.</u>

Si tratta dell'equazione lineare

$$x' = -\frac{2}{\sin 2t}x - \frac{1}{2\cos^2 t}.$$

Calcoliamo quindi una primitiva $A(t)$ di $a(t) = -\frac{2}{\sin 2y}$

$$\begin{aligned} A(t) &= -\int^t \frac{2}{\sin 2t}\,\mathrm{d}t = -\int^t \frac{1}{\sin t\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int^t \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t}\,\mathrm{d}t = -\int^t \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t - \int^t \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= \log\cos t - \log\sin t = -\log\tan t \end{aligned}$$

(in quanto sia $\sin t$ che $\cos t$ sono positive nell'intorno di $\frac{\pi}{4}$). Moltiplichiamo l'equazione per $e^{-A(t)} = \tan t$ ottenendo

$$\tan t \cdot x' + \frac{2\tan t}{\sin 2t}x = -\frac{\tan t}{2\cos^2 t}$$

ovvero

$$\tan t \cdot x' + \frac{2\sin t}{2\sin t\cos^2 t}x = -\frac{\sin t}{2\cos^3 t}$$

$$\tan t \cdot x' + \frac{1}{\cos^2 t}x = -\frac{\sin t}{2\cos^3 t}$$

$$(\tan t \cdot x)' = -\frac{\sin t}{2\cos^3 t}$$

$$\begin{aligned} \tan t \cdot x &= -\int^t \frac{\sin t}{2\cos^3 t}\,\mathrm{d}t + c \\ &= -\frac{1}{4}\int^t \frac{2}{\cos^3 t}\sin t\,\mathrm{d}t + c = -\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2 t} + c \end{aligned}$$

e quindi

$$x(t) = -\frac{1}{4\cos^2 t\tan t} + \frac{c}{\tan t} = -\frac{1}{4\sin t\cos t} + \frac{c\cos t}{\sin t}.$$

Imponendo la condizione $x(\pi/4) = 0$ si ottiene

$$0 = -\frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} + c\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

quindi

$$c = \frac{1}{2}.$$

La soluzione del problema è dunque

$$x(t) = -\frac{1}{4\sin t\cos t} + \frac{\cos t}{2\sin t}.$$

2. *Dire dove converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{n!}$$

e calcolarne la somma.

Soluzione.

Poniamo $x^2 = y$ e studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^n}{n!}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+1)!}}{\frac{n}{n!}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

si ha che la serie converge per ogni $y \in \mathbf{R}$. Anche la serie data ha dunque raggio di convergenza $+\infty$. Per calcolare la somma, osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{yy^{n-1}}{(n-1)!} = y\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^m}{m!} = ye^y$$

quindi la serie data ha somma

$$f(x) = x^2 e^{x^2}.$$

3. *Calcolare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{3} - y^2$$

sul cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Soluzione.

Calcoliamo i punti stazionari (per $x^2+y^2 \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 0 \end{cases}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} 3x = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = 2y\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata se $y = 0$ o $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ quindi, sostituendo nella prima equazione, o $3x = |x|$ o $3x = \frac{1}{2}$. Nel primo caso si ottiene $x \geq 0$ (perché $|x| \geq 0$) e quindi $3x = x$ e $x = 0, y = 0$. Nel secondo caso

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{36}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{8}{36}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Nel punto $(0,0)$ la funzione non è derivabile. Nei punti

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \qquad \left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

si può calcolare l'hessiano ottenendo

$$\mathcal{H}f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{H}f\left(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & \pm\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ \\ \pm\frac{4\sqrt{2}}{9} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

quindi

$$\det \mathcal{H}f\left(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{256}{27} - \frac{32}{81} < 0.$$

ambedue i punti $(1/6, \pm\sqrt{2}/3)$ non sono nè di massimo nè di minimo relativo. Passiamo alla frontiera $x^2 + y^2 = 1$ su cui, posto $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, la funzione vale

$$g(\theta) = 1 - \frac{\cos\theta}{3} - \sin^2\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

e si trova

$$g'(\theta) = \frac{\sin\theta}{3} - 2\sin\theta\cos\theta.$$

Dunque la derivata g' si annulla o per $\sin\theta = 0$ o per $\cos\theta = 1/6$. Quando $\sin\theta = 0$ si ha $\theta = 0, \pi, 2\pi$ e la funzione vale

$$g(0) = g(2\pi) = \frac{2}{3}, \quad g(\pi) = \frac{4}{3}.$$

Quando $\cos\theta = \frac{1}{6}$, $\theta = \arccos\frac{1}{6}, 2\pi - \arccos\frac{1}{6}$ e la funzione g vale

$$g(\arccos\frac{1}{6}) = 1 - \frac{1}{18} - \frac{35}{36} = -\frac{1}{36}$$

e analogamente

$$g(2\pi - \arccos\frac{1}{6}) = -\frac{1}{36}.$$

Occorre dunque confrontare i seguenti valori

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(1,0) &= \frac{2}{3} \\ f(-1,0) &= \frac{4}{3} \\ f\left(\frac{1}{6}, \pm\sqrt{\frac{35}{36}}\right) &= -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

quindi il massimo di f è $\frac{4}{3}$ ed il minimo è $-\frac{1}{36}$.

4. *Sia* $P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon 2x + y + 2z = 16\}$. *Calcolare quale è il punto del piano* P *di minima distanza dall'origine* $(0,0,0)$ *di* $\mathbf{R}^3$.

Soluzione.

La distanza di un punto (x,y,z) dall'origine è data da $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sul piano P si ha $y = 16 - 2x - 2z$ quindi basta minimizzare la funzione

$$g(x,z) = \sqrt{x^2 + (16-2x-2z)^2 + z^2}$$

o, che è lo stesso, la funzione

$$\begin{aligned} f(x,z) &= g^2(x,z) = x^2 + (16-2x-2z)^2 + z^2 \\ &= x^2 + 256 + 4x^2 + 4z^2 - 64x - 64z + 8xz + z^2. \end{aligned}$$

Calcoliamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 64 + 8z = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 10z - 64 + 8x = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 5x + 4z = 32 \\ 4x + 5z = 32 \end{cases}$$

cioè

$$9z = 32 \qquad z = \frac{32}{9}$$

e quindi

$$x = \frac{32-4z}{5} = \frac{32 - \frac{128}{9}}{5} = \frac{160}{45} = \frac{32}{9}.$$

Poiché un punto di minima distanza certamente esiste, il punto $x = \frac{32}{9}, z = \frac{32}{9}$ è tale punto. Il punto cercato su P è dunque

$$x = \frac{32}{9}, \quad y = 16 - 2x - 2z = \frac{16}{9}, \quad z = \frac{32}{9}.$$