

ANNO ACCADEMICO 2013–14
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
TERZO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

9 settembre 2014

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Determina, motivando la risposta, se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{per } x > 1, \\ e^{x-1} & \text{per } x \leq 1, \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 1$.

Esercizio 2. Calcola la derivata della funzione

$$f(t) = \sqrt{\arctan \frac{x-1}{x+2}}.$$

Esercizio 3. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_1^e \frac{(\log x)^3}{x} dx .$$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

- (i) di una funzione definita su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 2, e con valore massimo uguale a 3;
- (ii) di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0) = 4$ e che abbia come asintoto orizzontale sinistro la retta $y = 1$;
- (iii) di una funzione definita su tutto \mathbb{R} , decrescente, e avente come insieme immagine l'intervallo $(-1, 0]$.

Esercizio 5. Uno studio geo-economico sul dissesto geologico dell'entroterra ligure suggerisce che la probabilità A di allagamenti dipende dai fondi x , misurati in centinaia di migliaia di euro, investiti nella pulizia dei torrenti e canali secondo la seguente funzione:

$$A(x) = 10 \log_2 \frac{x+1}{x-1}.$$

- (i) Studia la funzione A , anche per fondi negativi.
- (ii) Quanti fondi bisogna investire per ridurre la probabilità di allagamenti al 10%?
- (iii) Basta un investimento di 200 000 euro per ridurre la probabilità di allagamenti a meno del 20%? (Motiva la risposta).
- (iv) Secondo questo modello, ha senso investire 50 000 euro nella pulizia di torrenti e canali?
- (v) Questo modello fornisce previsioni sicuramente prive di senso per quantità di fondi investiti inferiori a $x_0 > 1$ centinaia di migliaia di euro. Determina il valore di x_0 , spiegando il ragionamento che hai effettuato.

Esercizio 6. Determina come dipende dal parametro $h \in \mathbb{R}$ la mutua posizione fra il piano π di equazione $x + 2hz = 0$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ y + z = 1. \end{cases}$$