Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2014/15 — 25 settembre 2015

Nome e Cognome:

---

1) Data una varietà M e $p \in M$, indichiamo con $\mathcal{F}_p$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f \in C^\infty(M)$ tali che $f(p) = 0$. Sia poi $\mathcal{F}_p^2 \subset \mathcal{F}_p$ il sottospazio generato dalle funzioni della forma gh con g, $h \in \mathcal{F}_p$. Infine, sia $\Phi\colon \mathcal{F}_p \to T_p^*M$ l'applicazione lineare data da $\Phi(f) = df_p \in T_p^*M$.

(i) Dimostra che Φ ristretto a $\mathcal{F}_p^2$ è identicamente nullo.
(ii) Dimostra che Φ induce un isomorfismo fra lo spazio vettoriale $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_p^2$ e T_p^*M.

2) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$, e sia $Z \subset \mathbb{R}^4$ il piano $Z = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 = x^3 = 0\}$.

(i) Dimostra che l'insieme $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus Z \mid f(x) = 1\} \subset \mathbb{R}^4 \setminus Z$ è una sottovarietà di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$.
(ii) Calcola la coomologia di de Rham di M.

3) Sia $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ una curva liscia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma^1(t) > 0$ per ogni $t \in (0,1)$. Sia $\tilde{F}\colon (0,1) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da $\tilde{F}(t,x) = \big(\sigma^1(t)x, \sigma^2(t)\big)$, e indichiamo con F la restrizione di $\tilde{F}$ a $(0,1) \times S^2$.

(i) Dimostra che $F\colon (0,1) \times S^2 \to \mathbb{R}^4$ è un'immersione.
(ii) Supponiamo ora che σ sia un embedding, e diamo per noto che sotto questa ipotesi $M = F\big((0,1) \times S^2\big)$ sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$. Sia g la metrica Riemanniana indotta su M dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^4$. Sia $\psi\colon (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2$ la parametrizzazione locale data dalle coordinate sferiche

$$\psi(\theta^1, \theta^2) = (\sin\theta^1 \sin\theta^2, \cos\theta^1 \sin\theta^2, \cos\theta^2)\ ,$$

e indichiamo con $\Psi\colon (0,1) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to M$ la parametrizzazione locale di M data da

$$\Psi(t, \theta^1, \theta^2) = F\big(t, \psi(\theta^1, \theta^2)\big)\ .$$

Calcola la matrice che rappresenta g rispetto alle coordinate (t, θ^1, θ^2).
(iii) Dato $(\theta_o^1, \theta_o^2) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, dimostra che la curva $\gamma(s) = \Psi(s, \theta_o^1, \theta_o^2)$ è una geodetica.
(iv) Dato $(t_o, \theta_o^1) \in (0,1) \times (0, 2\pi)$, determina sotto quali condizioni la curva $\tilde{\gamma}(s) = \Psi(t_o, \theta_o^1, s)$ è una geodetica.
(v) Dato $(t_o, \theta_o^2) \in (0,1) \times (0, \pi)$, determina sotto quali condizioni la curva $\hat{\gamma}(s) = \Psi(t_o, s, \theta_o^2)$ è una geodetica.