Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2014/15 — 10 luglio 2015

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, e sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ data da

$$f(x^1, x^2, x^3) = \big((x^1)^2, (x^2)^2, (x^3)^2, x^2x^3, x^1x^2, x^1x^3\big) \,.$$

(i) Dimostra che f è un'immersione non globalmente iniettiva.
(ii) Dimostra che $f(S^2)$ ammette una struttura di sottovarietà embedded diffeomorfa al piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2k \geq 2$. Un 2-tensore $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ è *non degenere* se per ogni $v \in V \setminus \{O\}$ esiste un $w \in V$ tale che $\omega(v, w) \neq 0$. Puoi dare per noto il fatto che se ω è non degenere allora esiste una base $\{v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k\}$ di V tale che $\omega = \sum_{j=1}^k v^j \wedge w^j$, dove $\{v^1, w^1, \ldots, v^k, w^k\}$ è la base duale di V^*.

Sia M una varietà di dimensione $2k$, con $k \geq 1$, e sia $\omega \in A^2(M)$ una 2-forma. Diremo che ω è *non degenere* se ω_p è non degenere per ogni $p \in M$.

(i) Dimostra che $\omega \in A^2(M)$ è non degenere se e solo se ω^k è una forma di volume per M, dove ω^k rappresenta il prodotto esterno di ω con se stessa k volte.
(ii) Dimostra che ogni 2-forma sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{2k}(\mathbb{R})$ è degenere in almeno un punto.
(iii) Costruisci una 2-forma chiusa non degenere su $S^2 \times S^2$. [*Suggerimento:* se $\pi_j\colon M_1 \times M_2 \to M_j$ è la proiezione canonica, e $\omega \in A^2(M_j)$ allora $\pi_j^*\omega \in A^2(M_1 \times M_2)$.]
(iv) Dimostra che se M è compatta e ammette una 2-forma chiusa non degenere allora $H^2(M) \neq (O)$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana, $\mathcal{E} \subseteq TM$ il dominio dell'esponenziale, ed $E\colon \mathcal{E} \to M \times M$ l'applicazione data da $E(v) = \big(\pi(v), \exp(v)\big)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica. Dato $v \in T_pM$, mostra che $dE_v\colon T_v(TM) \to T_pM \times T_{\exp(v)}M$ è invertibile se e solo se $d(\exp_p)_v\colon T_v(T_pM) \to T_{\exp(v)}M$ è invertibile.