Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2012/13 — 24 giugno 2013

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'insieme

$$M = \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 - (x^5)^2 = 0 \right\} .$$

(i) Dimostra che M è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^5$.

(ii) Dimostra che M è un cono, nel senso che $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^*$ implica $tx \in M$. Usando questo fatto mostra che M ammette come retratto di deformazione liscio una varietà differenziabile compatta N di dimensione 3.

(iii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di M. (*Suggerimento:* usa il teorema di Künneth.)

2) Siano M, N due varietà differenziabili compatte, connesse e orientate di dimensione n, e sia $f\colon M \to N$ una funzione differenziabile.

(i) Sia $q \in N$ un valore regolare di f. Mostra che l'insieme $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ è finito.

(ii) Per ogni $i = 1, \ldots, k$ sia U_i un intorno di p_i in M. Mostra che se $U_1, \ldots, U_k$ sono a due a due disgiunti allora esiste un intorno V di q in N tale che

$$f^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_k .$$

(iii) Mostra che è possibile scegliere un intorno V di q e intorni $U_1, \ldots, U_k$ di $p_1, \ldots, p_k$ a due a due disgiunti in modo che

$$f^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup U_k ,$$

e che $f|_{U_i}\colon U_i \to V$ sia un diffeomorfismo per ogni $i = 1, \ldots, k$.

(iv) Mostra che esiste una n-forma $\omega \in A^n(N)$ tale che $\int_N \omega = 1$.

(v) Dimostra che

$$\int_M f^*\omega = d$$

è un intero che non dipende dalla scelta di $\omega \in A^n(N)$ che soddisfa la condizione del punto precedente. (*Suggerimento:* l'integrazione su una varietà compatta orientata X induce un isomorfismo tra $H^n(X)$ e $\mathbb{R}$).

(vi) Mostra che, se f non ha valori critici e k, d sono gli interi definiti nei punti precedenti, allora $|d| = k$.

3) Considera lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato della metrica Riemanniana canonica, e sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata. Ricorda che l'usuale prodotto vettore di $\mathbb{R}^3$ è dato da

$$(x^1, x^2, x^3) \wedge (y^1, y^2, y^3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

Sia $\widetilde{\nabla}\colon \mathcal{T}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{T}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ data per ogni coppia di campi vettoriali X, $Y \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ da

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X \wedge Y ,$$

dove il prodotto vettore viene calcolato punto per punto.

(i) Mostra che $\widetilde{\nabla}$ è una connessione compatibile con la metrica.

(ii) Mostra che le geodetiche rispetto a $\widetilde{\nabla}$ coincidono con le geodetiche rispetto a ∇ (che sappiamo essere i segmenti di retta parametrizzati a velocità costante).

(iii) Fissati $p \in \mathbb{R}^3$ e $v \in T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ di norma unitaria (d'ora in poi sottointenderemo l'identificazione canonica di $T_q\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$ per ogni $q \in \mathbb{R}^3$), sia $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\sigma(t) = p + tv$. Sia inoltre $w_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo ortogonale a v. Determina funzioni reali α, $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che il campo lungo σ definito da $w(t) = \alpha(t) w_0 + \beta(t)\, v \wedge w_0$ sia parallelo per $\widetilde{\nabla}$.