Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2013/14 — 8 gennaio 2014

Nome e Cognome:

---

1) Sia M una varietà, e sia S una sottovarietà embedded di M. Diremo che un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ *è tangente a* S se $X(p) \in T_pS$ per ogni $p \in S$, dove stiamo identificando T_pS con l'immagine di T_pS in T_pM tramite il differenziale dell'inclusione $S \hookrightarrow M$.

(i) Dimostra che $X \in \mathcal{T}(M)$ è tangente a S se e solo se $X_p(\mathbf{f}) = 0$ per ogni $p \in S$ e ogni germe $\mathbf{f} \in C^\infty_M(p)$ tale che $\mathbf{f}|_S \equiv 0$.

(ii) Dimostra che, se X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ sono tangenti a S allora anche $\mathcal{L}_X Y$ è tangente a S.

(iii) Sia ∇ una connessione lineare su M. Dimostra che se i campi X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ sono tangenti a S, e $p \in S$ è tale che $Y(p) = 0$ allora $\nabla_X Y(p) \in T_pS$.

(iv) Sia $X \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ dato da
$$X(x, y, z) = (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z} \,.$$
Dimostra che X è tangente a S^2, mentre il campo $\nabla_X X$ è tangente a S^2 in solo due punti, dove ∇ è la connessione piatta di $\mathbb{R}^3$.

2) Data la sfera unitaria $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, poniamo
$$X_1 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in S^3 \mid x^1 = x^2 = 0\}\,, \qquad X_2 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in S^3 \mid x^3 = x^4 = 0\}\ ,$$
e sia $M = S^3 \setminus (X_1 \cup X_2)$. Sia poi Y il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dall'unione della retta $\{x^1 = x^2 = 0\}$ e della circonferenza $\{x^3 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0\}$, e poniamo $N = \mathbb{R}^3 \setminus Y$.

(i) Dimostra che la restrizione a M della proiezione stereografica $S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^3$ è un diffeomorfismo tra M e N.

(ii) Dimostra che l'applicazione $f\colon S^1 \times S^1 \to M$ data da
$$f\big((x^1, x^2), (y^1, y^2)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\big(x^1, x^2, y^1, y^2\big)$$
è una ben definita equivalenza omotopica liscia.

(iii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di N.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana, con applicazione esponenziale $\exp\colon \mathcal{E} \to M$, dove $\mathcal{E} \subseteq TM$ è il dominio dell'applicazione esponenziale. Sia $E\colon \mathcal{E} \to M \times M$ data da $E(v) = \big(\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)\big)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica. Dato $v \in \mathcal{E}$ e $p = \pi(v)$, dimostra che $dE_v\colon T_v(TM) \to T_pM \times T_{\exp_p(v)}M$ è invertibile se e solo se $d(\exp_p)_v\colon T_v(T_pM) \to T_{\exp_p(v)}M$ è invertibile.