Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2010/11 — 21 settembre 2011

Nome e Cognome:

---

1) Sia $F\colon M \to N$ un'immersione, e $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M tale che $F|_{U_\alpha}$ sia un omeomorfismo con l'immagine per ogni α.

(i) Se F è globalmente iniettiva, dimostra che $\left\{\left(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F|_{U_\alpha}^{-1}\right)\right\}$ è un atlante per $F(M)$.

(ii) Se F *non* è globalmente iniettiva, è ancora vero che $\left\{\left(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F|_{U_\alpha}^{-1}\right)\right\}$ è un atlante per $F(M)$?

2) Per ogni $n \geq k \geq 2$ calcola la coomologia di de Rham della varietà

$$M_{n,k} = \mathbb{R}^n \setminus \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = \cdots = x^k = 0\} .$$

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana non compatta e completa (nel senso che la distanza Riemanniana è una distanza completa: tutte le successioni di Cauchy convergono). Dimostra che allora esiste una geodetica $\sigma\colon [0, +\infty) \to M$ definita su tutto $\mathbb{R}^+$ e globalmente minimizzante, cioè che realizza la distanza Riemanniana fra due qualsiasi punti del suo sostegno. [*Suggerimento:* puoi usare l'enunciato del teorema di Hopf-Rinow, e in particolare i fatti che due punti in una varietà completa sono sempre collegati da una geodetica minimizzante, e che una varietà completa non compatta è necessariamente illimitata.]