Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2010/11 — 1 febbraio 2011

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M, e siano $K \subseteq M$ un compatto e $U \subseteq M$ un intorno aperto di K. Dimostra che per ogni sezione $\sigma \in \mathcal{E}(U)$ esiste una sezione $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}(M)$ tale che $\tilde{\sigma}|_K \equiv \sigma|_K$.

2) Ricordando che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omemorfo a S^2, determina la coomologia di de Rham $H^\bullet\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\big)$ per ogni $n \geq 1$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e $\sigma\colon [a, b] \to M$ una curva regolare a tratti. L'*energia* $E(\sigma)$ di σ è data da

$$E(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\|^2_{\sigma(t)}\, dt\ .$$

(i) Dimostra che $L(\sigma)^2 \leq (b-a)E(\sigma)$, con uguaglianza se e solo se σ è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco.

(ii) Sia $\sigma_0\colon [a, b] \to M$ una geodetica minimizzante che congiunge $p = \sigma(a)$ e $q = \sigma(b)$. Dimostra che $E(\sigma_0) \leq E(\sigma)$, con uguaglianza se e solo se anche σ è una geodetica minimizzante.

(iii) Dimostra che σ è una geodetica se e solo se è un punto critico del funzionale energia, nel senso che per ogni variazione propria $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ di σ si ha $E'(0) = 0$, dove $E\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^+$ è data da $E(s) = E(\sigma_s)$, e $\sigma_s = \Sigma(s, \cdot)$.