Istituzioni di Geometria

Quinto scritto — 16 settembre 2010

Nome e Cognome:

---

1) Sia M una varietà differenziabile connessa. Dimostra che un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ di flusso Θ è completo (cioè il dominio di definizione di Θ è $\mathbb{R} \times M$) se e solo se per ogni $p \in M$ e ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ l'insieme $\Theta^p\big((-t_0, t_0)\big)$ è relativamente compatto in M. Deducine che se M è compatta allora ogni campo vettoriale su M è completo.

2) Sia $\{E_1, \dots, E_n\}$ un riferimento locale per il fibrato tangente TM di una n-varietà M sopra un aperto U, e indichiamo con $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ il riferimento locale duale di T^*M sopra U. Siano inoltre $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$ tali che

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k E_k$$

per i, j, $k = 1, \dots, n$. Dimostra che

$$d\epsilon^k = - \sum_{1 \le i < j \le n} c_{ij}^k \, \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

per $k = 1, \dots, n$.

3) Sia

$$M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$$

il semipiano positivo, considera fissato su M l'atlante costituito dalla sola carta (U, φ), dove $U = M$ e $\varphi(x^1, x^2) = (x^1, x^2)$, e indica rispettivamente con ∂_1, ∂_2 i campi vettoriali coordinati $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$. Poni infine su M la metrica Riemanniana definita da

$$g_{ij}(x^1, x^2) = \frac{\delta_{ij}}{(x^2)^2}, \qquad i, j \in \{1, 2\},$$

e considera fissata su M la connessione di Levi–Civita relativa alla metrica g.

(i) Mostra che
$$\nabla_{\partial_1} \partial_1 = \frac{1}{x^2} \partial_2, \qquad \nabla_{\partial_1} \partial_2 = \nabla_{\partial_2} \partial_1 = -\frac{1}{x^2} \partial_1, \qquad \nabla_{\partial_2} \partial_2 = -\frac{1}{x^2} \partial_2.$$

(ii) Sia $\gamma\colon I \to (0, +\infty)$ una funzione di classe C^∞. Mostra che la curva $\gamma\colon I \to M$ definita da $\gamma(t) = (0, f(t))$ è una geodetica se e solo se $f''(t) f(t) = f'(t)^2$ per ogni $t \in I$.

(iii) Sia $\gamma_0\colon I \to M$ la geodetica massimale tale che $\gamma_0(0) = (0, 1)$ e $\gamma_0'(0) = \partial_2$. Mostra che $I = \mathbb{R}$ e $\gamma_0(t) = (0, e^t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(iv) Per ogni $p > 0$, calcola la distanza Riemanniana tra i punti $(0, 1) \in M$ e $(0, p) \in M$.