Istituzioni di Geometria

Quarto scritto — 20 luglio 2010

Nome e Cognome:

---

1) Data la sfera $S^3 = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \|p\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$, considera per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\varphi_t\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \cos t - x^2 \sin t \\ x^1 \sin t + x^2 \cos t \\ x^3 \cos t + x^4 \sin t \\ -x^3 \sin t + x^4 \cos t \end{pmatrix} .$$

(i) Dimostra che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi_t(S^3) \subseteq S^3$ e che, indicata con ψ_t la restrizione di φ_t a S^3, per ogni t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ si ha $\psi_{t_1} \circ \psi_{t_2} = \psi_{t_1+t_2}$.

(ii) Determina un campo vettoriale $X_1 \in \mathcal{T}(S^3)$ di cui $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ rappresenti il flusso.

(iii) Siano X_2, $X_3 \in \mathcal{T}(S^3)$ i campi vettoriali definiti da

$$X_2(x^1, x^2, x^3, x^4) = (-x^4, x^3, -x^2, x^1) ,$$
$$X_3(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^3, x^4, -x^1, -x^2) ,$$

(per ogni $p \in S^3$ stiamo identificando $T_p(S^3)$ con il sottospazio vettoriale $\mathrm{d}i_p(T_p(S^3)) \subseteq \mathbb{R}^4$, dove $i\colon S^3 \to \mathbb{R}^4$ è l'inclusione). Mostra che per ogni $p \in S^3$ i vettori $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ sono linearmente indipendenti, e deducine che il fibrato tangente di S^3 è banale.

2) Sia M una varietà differenziabile di dimensione 3. Una forma $\omega \in A^1(M)$ è detta *C-forma* se $\omega \wedge \mathrm{d}\omega \in A^3(M)$ è diversa da zero in ogni punto di M.

(i) Sia ω una C-forma su M, sia Ω un aperto di M e siano $X, Y \in \mathcal{T}(\Omega)$ due campi vettoriali linearmente indipendenti in ogni punto di Ω. Mostra che, se $\omega_p(X_p) = \omega_p(Y_p) = 0$ per ogni $p \in \Omega$, allora $\omega_p([X, Y]_p) \neq 0$ per ogni $p \in \Omega$. [*Suggerimento:* sfrutta l'uguaglianza

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) ,$$

valida per ogni $\omega \in A^1(M)$, X, $Y \in \mathcal{T}(M)$.]

Sia ora $M = \mathbb{R}^3$ con le usuali coordinate x^1, x^2, x^3, e, data $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sia $\omega_f \in A^1(\mathbb{R}^3)$ la forma definita da

$$\omega_f = f \cdot \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 .$$

(ii) Determina una funzione $f_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ per cui ω_{f_0} sia una C-forma.

(iii) Per ogni $p \in \mathbb{R}^3$, sia $H_p = \ker(\omega_{f_0})_p \subseteq T_p(\mathbb{R}^3)$. Mostra che non esistono un aperto U di $\mathbb{R}^2$ ed un'immersione $g\colon U \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{d}g_q(T_q(U)) \subseteq H_{g(q)}$ per ogni $q \in U$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientabile con forma di volume Riemanniana ν_g. L'*operatore divergenza* $\mathrm{div}\colon \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$ è l'operatore che associa al campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ l'unica funzione $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ tale che

$$\mathrm{d}(\iota_X \nu_g) = \mathrm{div}(X)\, \nu_g ,$$

dove $\iota_X\colon \bigwedge^\bullet(M) \to \bigwedge^{\bullet-1}(M)$ è la *moltiplicazione interna per X* che associa a ciascuna k-forma ω l'unica $(k-1)$-forma $\iota_X\omega$ tale che

$$\iota_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

per ogni $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in \mathcal{T}(M)$.

(i) Dimostra che per ogni $u \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$\mathrm{div}(uX) = u\, \mathrm{div}(X) + \langle \mathrm{grad}\, u, X \rangle$$

dove il *gradiente* $\operatorname{grad} u \in \mathcal{T}(M)$ è l'unico campo vettoriale tale che

$$\forall X \in \mathcal{T}(M) \qquad \langle \operatorname{grad} u, X \rangle = \mathrm{d}u(X) \; .$$

(ii) Supponi che M sia compatta. Dimostra il *teorema della divergenza:*

$$\forall X \in \mathcal{T}(M) \qquad \int_M \operatorname{div}(X) \, \nu_g = 0 \; ,$$

e deduci la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_M \langle \operatorname{grad} u, X \rangle \, \nu_g = - \int_M u \operatorname{div}(X) \, \nu_g$$

per ogni $u \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathcal{T}(X)$.