Istituzioni di Geometria

Terzo scritto — 10 giugno 2010

Nome e Cognome:

---

1) Considera $\mathbf{R}^{2n}$ con coordinate $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ e sia $\omega \in \bigwedge^2(\mathbf{R}^{2n})$ definita da

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i \ .$$

Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ l'insieme delle matrici

$$G = \{A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R}) \mid A^*(\omega) = \omega\} \ ,$$

dove stiamo identificando una matrice con la funzione lineare da essa rappresentata.

(i) Dimostra che G è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$.

(ii) Dimostra che $A \in G$ se e solo se ${}^t\!AJA = J$, dove J è la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{vmatrix} \ .$$

(iii) Dimostra che G è una sottovarietà di $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$, e calcolane la dimensione.

2) Sia $f \colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 \ .$$

(i) Determina l'insieme dei punti critici $\mathrm{Crit}(f) = \{p \in \mathbf{R}^4 \mid df_p = 0\}$ e l'unico valore non regolare $\alpha \in \mathbf{R}$ di f.

Per ogni $\beta \in \mathbf{R}$, poni $M_\beta = f^{-1}(\beta)$ se $\beta \neq \alpha$, e $M_\alpha = f^{-1}(\alpha) \setminus \mathrm{Crit}(f)$.

(ii) Dimostra che M_β è una sottovarietà di $\mathbf{R}^4$ per ogni $\beta \in \mathbf{R}$.

(iii) Dimostra che M_β è diffeomorfa a $M_{\beta'}$ per ogni $\beta, \beta' \in \mathbf{R} \setminus \{\alpha\}$.

(iv) Mostra che se $\beta \neq \alpha$, allora M_β non è diffeomorfa a M_α (suggerimento: calcola i gruppi di coomologia di deRham di M_α e M_β).

3) Sia g una metrica Riemanniana completa su una varietà M, e $K \subset\subset M$ un sottoinsieme compatto di M. Dimostra che esiste una funzione $h \in C^\infty(M)$ tale che $h|_K \equiv 0$ e il diametro di M è limitato rispetto alla metrica Riemanniana $\tilde{g} = e^{-2h} g$. [*Suggerimento:* fissato $x \in K$, cerca $h \in C^\infty(M)$ e $C > 0$ in modo che $h(y) + C > d(x, y)$ per ogni $y \in M$.]