Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto — 15 giugno 2005

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ mai nulla e torsione τ, e sia $s_0 \in I$ fissato. Sia $I_0 := \{s \in I \mid \tau(s) = 0, \dot\tau(s) \neq 0\}$ e sia $J \subseteq \mathbb{R}$ l'immagine di I_0 tramite la funzione $\frac{\kappa}{\dot\tau}$.

Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ non nullo sia $\eta^\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva data da $\eta^\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon\,\mathbf{b}(s)$, dove $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è il riferimento di Frenet di σ.

(i) Dimostra che η^ε è una curva biregolare se e solo se $\varepsilon \notin J$.

Assumiamo nel seguito $\varepsilon \notin J$ e indichiamo con $\mathbf{t}^\varepsilon$, $\mathbf{n}^\varepsilon$ e $\mathbf{b}^\varepsilon$ i versori tangente, normale e binormale di η^ε, e con κ^ε, τ^ε la curvatura e la torsione di η^ε. Dimostra che

(ii) $\mathbf{b}^\varepsilon = \pm\mathbf{b}$ sse σ è una curva piana sse $\mathbf{t}^\varepsilon = \mathbf{t}$ sse $\mathbf{n}^\varepsilon = \pm\mathbf{n}$;

(iii) $\mathbf{n}^\varepsilon = \pm\mathbf{b}$ sse $\varepsilon\dot\tau = \kappa(1 + \varepsilon^2\tau^2)$ sse esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\tau(s) = \frac{1}{\varepsilon}\tan\left(\int_{s_0}^{s} \kappa\, dt + c\right).$$

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di raggio 1 con centro nell'origine, sia $q_N = (0,0,1)$ e $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano $\{z = 0\}$.

Sia $\psi\colon S \setminus \{q_N\} \to \mathbb{R}^2$ la proiezione stereografica, cioè l'applicazione così definita: per ogni $p \in S \setminus \{q_N\}$, sia L_p la retta passante per p e q_N; allora $\psi(p)$ è il punto $L_p \cap H$.

(i) Mostra che

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

(ii) Mostra che ψ è un diffeomorfismo.

(iii) Sia X il campo vettoriale su $S \setminus \{q_N\}$ definito da

$$X(p) = (d\psi_p)^{-1}(e_1)$$

per ogni $p \in S \setminus \{q_N\}$, dove e_1 è il primo vettore della base canonica. Mostra che X si estende a un campo vettoriale su S.

(iv) Calcola i punti singolari di X in S e l'indice di X in tali punti.