ANNO ACCADEMICO 2015–16

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E MARGHERITA LELLI-CHIESA

1 giugno 2016

Nome e cognome____

Corso di studio____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l’intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Determina in quali intervalli della retta reale la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 2x - 3$$
è concava.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:
$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2)\, dx \ .$$

Esercizio 3. La funzione $y(t) = \cos t + 2\sin t + 3$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y'' = -y + 3$? Motiva la risposta.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Uno studio geochimico mostra come la percentuale P di calcare in una falda acquifera dipende dalla quantità x di pioggia del mese precedente secondo la formula

$$P(x) = 100 - \frac{200}{1 + 3e^{-2x}} \ .$$

(i) Studia la funzione P anche per valori di x negativi.

(ii) Qual è la percentuale di calcare presente nella falda se nel mese precedente non ha piovuto?

(iii) Secondo questo modello, esiste una quantità x_0 di pioggia che riesce a eliminare completamente il calcare dalla falda acquifera?

Esercizio 5. Vuoi elaborare un nuovo protocollo di somministrazione di un farmaco sperimentale contro il cancro. Indichiamo con $v(t) \in [0,1]$ la percentuale di medicinale somministrato al tempo t, dove $v(t) = 0$ vuol dire che non viene somministrato alcun medicinale, mentre $v(t) = 1$ vuol dire che al tempo t viene somministrata la quantità massima di medicinale. Se indichiamo con $N(t)$ il numero di cellule tumorali presenti al tempo t l'azione del medicinale può venire riassunta dall'equazione differenziale

$$N'(t) = a\big(1 - 2v(t)\big)N(t) \ ,$$

dove $a > 0$ è un coefficiente che rappresenta la malignità del cancro.

L'assunzione del medicinale provoca però danni collaterali, tanto maggiori quanto è maggiore la quantità totale di medicinale somministrato; tali danni possono essere quantificati dall'integrale

$$\int_0^t v(s)\,ds \ .$$

Stabilire un protocollo significa scegliere la funzione $v\colon [0,T] \to [0,1]$ che descrive quanto medicinale somministrare in ciascun istante dell'intervallo di tempo $[0,T]$ della cura. Tenendo presenti il numero di cellule tumorali al termine della cura e gli effetti collaterali subiti, l'indice di qualità J del protocollo scelto è dato da

$$J = rN(T) + \int_0^T v(s)\,ds \ ,$$

dove $r > 0$ è un coefficiente di normalizzazione. Più basso è il valore di J migliore è il protocollo di cura.

(i) Verifica che se N_0 è il numero di cellule tumorali all'inizio della cura allora

$$N(t) = N_0 \exp\left(at - 2a\int_0^t v(s)\,ds\right)$$

è il numero di cellule tumorali al tempo $t \in [0,T]$.

(ii) Prendendo $T = 1$, $a = 10$, $N_0 = 10^5$ e $r = 10^{-5}$ determina quale fra i seguenti protocolli
  (a) $v(t) \equiv 0$;
  (b) $v(t) \equiv 1$;
  (c) $v(t) = t^2$;
  (d) $v(t) = \sin(\pi t)$

  è il migliore (cioè fornisce il valore più basso di J). [*Suggerimento:* si ha $e^{10/3} > 28$ ed $e^{(10\pi - 40)/\pi} < 0.07$.]

Esercizio 6. Una popolazione di giaguari vive in una regione della foresta amazzonica non più adatta al loro sostentamento a causa del disboscamento eccessivo. Uno studio etologico ha mostrato che il numero $G(t)$ di giaguari presenti nella popolazione al tempo t (misurato in decenni) soddisfa l'equazione differenziale

$$G' = \frac{1}{100}(G-100)(G+100) \; .$$

(i) Indicando con G_0 il numero di giaguari presenti nella popolazione al tempo $t = 0$, determina l'espressione della funzione $G(t)$ risolvendo l'equazione differenziale data.

(ii) Se $G_0 = 50$, secondo questo modello al tempo $t = 1$ la popolazione di giaguari sarà ancora viva o si sarà estinta? [*Suggerimento:* $e^{-2} < 1/3$.]

(iii) Determina il minimo valore di G_0 che assicura che, secondo questo modello, la popolazione di giaguari non si estingua prima del tempo $t_0 = \log 2$.