

ANNO ACCADEMICO 2014–15

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

**MATEMATICA**

**TERZO COMPITINO — TESTO A**

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

**29 maggio 2015**

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \log x \, dx .$$

**Esercizio 2.** Determina, spiegando perché, se la seguente frase è vera o falsa: *La funzione  $y(t) = \frac{1}{1-2t}$  è una soluzione dell'equazione differenziale  $y' = 2y^2$ .*

**Esercizio 3.** Esiste un  $k \in \mathbb{R}$  per cui il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 4x - 6y = k, \end{cases}$$

ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica un valore di  $k$  per cui il sistema abbia soluzione, e descrivi tutte le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

## SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** In un modello matematico del volo di un uccello, la potenza  $P$  necessaria per mantenere la velocità di volo  $v$  è data da

$$P(v) = \frac{A}{\rho v} + B\rho v^2,$$

dove  $\rho$  è la densità dell'aria e  $A$  e  $B$  sono due costanti dipendenti dalla forma dell'uccello.

- (i) Supponendo  $A = 54$  e  $B = \rho = 1$ , determina, se esiste, la velocità  $v_0$  per cui la potenza è minima.
- (ii) Sempre supponendo  $A = 54$  e  $b = \rho = 1$ , se l'uccello vola per 5 minuti con una velocità  $v: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$v(t) = \frac{e^t}{1 + e^{2t}},$$

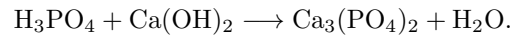
determina la potenza totale consumata dall'uccello nel suo volo.

**Esercizio 5.** In un'isola della Nuova Zelanda viene introdotta una popolazione di lupi per contrastare l'espansione eccessiva di una popolazione preesistente di pecore. Studi etologici mostrano come la variazione  $P'$  del numero di pecore e la variazione  $L'$  del numero di lupi dipende dal numero  $P$  di pecore e dal numero  $L$  di lupi presenti al tempo  $t$  misurato in anni nel modo seguente:

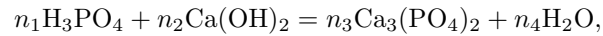
$$\begin{cases} P' = 6P - 2L, \\ L' = 2P + L. \end{cases}$$

- (i) Risolvi questo sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari.
- (ii) Supponendo che al tempo  $t = 0$  sull'isola siano presenti 100 pecore e vengano introdotti 10 lupi, descrivi cosa succede alle popolazioni di pecore e lupi con il passare del tempo.
- (iii) Supponendo che al tempo  $t = 0$  sull'isola siano presenti 100 pecore e vengano introdotti 200 lupi, esiste un momento in cui la popolazione di pecore si estingue?
- (iv) Supponendo che al tempo  $t = 0$  sull'isola siano presenti 100 pecore, qual è il minimo numero intero di lupi che devono essere introdotti al tempo  $t = 0$  per essere certi che la popolazione di pecore si estingua? E in questo caso in quanto tempo si estinguerà?

**Esercizio 6.** Bilancia la seguente reazione chimica, risolvendo esplicitamente un sistema lineare:



[*Suggerimento:* bilanciare questa reazione chimica significa trovare i più piccoli numeri naturali  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  per cui si abbia



dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.]