Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino — 21 maggio 2004

Nome e Cognome:

Da svolgere a casa:

1) Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse delle z la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = \bigl(1 + t^2, 0, t\bigr).$$

Indichiamo con $\sigma_a\colon [0, 2\pi] \to S$ il parallelo ottenuto intersecando S con il piano $\{z = a\}$, e con $\tau_\phi\colon \mathbb{R} \to S$ il meridiano ottenuto intersecando S con il piano $\{(\sin\phi)x - (\cos\phi)y = 0\}$.

(i) Calcola la lunghezza di ciascun parallelo σ_a.

(ii) Calcola curvatura normale e curvatura geodetica di ciascun parallelo σ_a e ciascun meridiano τ_ϕ.

(iii) Calcola le curvature Gaussiana e media di S.

(iv) *Facoltativo:* Trova una curva asintotica di S uscente dal punto $(1, 0, 0) \in S$.

2) (i) Sia S una superficie regolare, chiusa e connessa. Dimostra che S è un piano se e solo se per ogni punto di S passano tre rette distinte tutte contenute in S.

(ii) Esiste una superficie regolare, chiusa, connessa che non sia un piano e tale che per ogni punto di S passano due rette distinte tutte contenute in S?

3) (i) Dimostra che una geodetica di una superficie che sia anche una linea di curvatura è necessariamente una curva piana.

(ii) Dimostra che se una geodetica di una superficie è una curva piana (ma non una retta) allora è una linea di curvatura della superficie.

(iii) Trova un esempio di una linea di curvatura che sia una curva piana ma non una geodetica.

(iv) Dimostra che se S è una superficie connessa tale che tutte le geodetiche sono curve piane allora S è contenuta in un piano o in una sfera.