Geometria e Topologia Differenziale

Secondo compitino A.A. 2005/06 — 5 dicembre 2005

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4y^2 - z = 0\}.$$

Mostra che S è una superficie regolare e calcola la curvatura Gaussiana e la curvatura media di S in ogni punto.

2) Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva C nel piano $y = 0$.

(i) Sia $p \in S$ un punto sull'asse z. Mostra che p è ombelicale.

(ii) Sia $p \in S$ un punto non planare e non appartente all'asse z, e sia $p_0 \in C$ il punto sullo stesso parallelo di p. Mostra che p è ombelicale se e solo se valgono le due condizioni seguenti:

(a) C ha curvatura non nulla κ_0 in p_0;

(b) il centro della circonferenza osculatrice a C in p_0 giace sull'asse z. Questo è equivalente a dire che la distanza di p_0 dall'asse z è $\frac{\cos\theta}{\kappa_0}$, dove θ è l'angolo tra la tangente a C in p_0 e l'asse z.