Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino A.A. 2008/09

Da consegnare il 12 gennaio 2008

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$ e curvatura Gaussiana $K\colon S \to \mathbb{R}$.

(i) Dimostra che

$$\int_S |K| \, d\nu \geq 4\pi \ .$$

(ii) Posto $K^+ = \max\{K, 0\}$, dimostra che

$$\int_S K^+ \, d\nu = 4\pi$$

se e solo se N è iniettiva sull'aperto $\{p \in S \mid K(p) > 0\}$.

2) Una *curva asintotica* su una superficie orientata S è una curva regolare $\sigma\colon I \to S$ tale che $Q_\sigma(\sigma') \equiv 0$, dove $Q_{\sigma(t)}$ è la seconda forma fondamentale di S in $\sigma(t)$.

(i) Sia $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva asintotica con $\kappa(0) \neq 0$. Dimostra che $|\tau(0)| = \sqrt{-K\bigl(\sigma(0)\bigr)}$.

(ii) Siano σ_1, $\sigma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ due curve asintotiche con $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$ e $\kappa_1(0)$, $\kappa_2(0) \neq 0$, dove κ_j è la curvatura di σ_j. Dimostra che se $K(p) < 0$ allora $\tau_2(0) = -\tau_1(0)$, dove τ_j è la torsione di σ_j.

3) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ soluzione dell'equazione $(x/2)^2 + (y/2)^2 + z^2 - 1 = 0$. Indichiamo con P l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_1$, con Q l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_3$, e con R l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+(e_1 + e_2 + e_3)$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che l'intersezione C di S con il piano $H = \{z = 0\}$ è una geodetica di S.

(ii) Dimostra che la geodetica che passa per P con angolo $\pi/4$ rispetto a C non può passare anche per il punto Q.

(iii) Dimostra che la geodetica uscente da R con direzione tangente nel piano xy non può contenere punti più vicini all'asse z di R stesso.

4) Siano $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\colon I \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\colon J \to \mathbb{R}^3$ due curve parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, e definiamo $\varphi\colon I \times J \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u, v) = \sigma(u) + \gamma(v) \ .$$

(i) Dimostra che se $\dot\sigma_1(u)\dot\gamma_1(v) > 0$ e $\dot\sigma_2(u)\dot\gamma_2(v) < 0$ per ogni $(u, v) \in I \times J$ allora φ è una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, calcola prima e seconda forma fondamentale di S.

Assumiamo adesso che σ sia biregolare, di curvatura κ e torsione τ, e che γ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $\dot\sigma$.

(iii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, esprimi la seconda forma fondamentale di S in termini di κ e τ e del riferimento di Frenet di σ.

(iv) Dimostra che φ non può mai essere una parametrizzazione globale ortogonale.

(v) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, trova delle condizioni necessarie e sufficienti su σ perché S abbia curvatura Gaussiana identicamente nulla.