PARTE A

1. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |\cos(|x||y|) + x|$ nel punto $(0,0)$ vale
   A: $(1,1)$ B: $(0,1)$ C: N.A. D: N.E. E: $(1,0)$

2. L' area di $\Omega = \{(x,y)|x^2 + 3y^2 < 1, y > 6x\}$ vale:
   A: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ B: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ C: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ D: N.A. E: $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

3. Sia data la funzione $f(x,y) = |\ln(1 + \frac{1}{2}\sin(|x||y|))|$. Allora il punto $(1, \frac{\pi}{4})$ e':
   A: max assoluto B: max relativo C: min assoluto D: N.A. E: sella

4. Il gradiente della funzione $f(x,y) = (|\sin x|^6 + |y|^9)^{1/6}$ nel punto $(0,0)$ vale
   A: $(1,0)$ B: $(0,1)$ C: N.A. D: $(0,0)$ E: N.E.

5. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin(1 - \cos(x+y))$, allora $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}(0,0)$ vale
   A: 16 B: 2 C: N.A. D: 15 E: -16 4

6. Sia data nel piano (x,z) la regione

$$\Omega = \{(x,y)|x^2 + z^2 - 4x - 2z + 4 = 0\}$$

   . Il volume della regione ottenuta ruotando Ω intorno all' asse z vale:
   A: $5\pi^2$ B: $2\pi^2$ C: $3\pi^2$ D: N.A. E: $4\pi^2$

7. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| - |\sin y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ln(1 + x^2 + y^6)$ vale
   A: -1 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: 0

8. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - (\sin y)^2}{y^2 + (\sin x)^2}$ vale:
   A: 0 B: 1 C: N.A. D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

9. Il seguente $\int\int_\Omega xye^{x^2+y^2} dxdy$ dove

$$\Omega = \{(x,y)|\min\{x,y\} > 0, \max\{x,y\} < 2\}$$

   vale
   A: $2(e^4 - 1)^2$ B: $(e^4 - 1)^2$ C: N.A. D: $\frac{1}{2}(e^4 - 1)^2$ E: $\frac{1}{4}(e^4 - 1)^2$

10. Il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y)|x^2 + y^2 + z^2 < 4, \max\{x,y,z\} < 2, \min\{x,y,z\} > 0\}$$

   vale
   A: N.A. B: $\frac{2}{3}\pi$ C: 2π D: 4π E: $\frac{4}{3}\pi$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

24 Luglio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=280231

Analisi 2
- Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - 24 Luglio 2017

Esercizio 1
Calcolare il seguente integrale di prima specie lunga una curva:

$$\int_\gamma x(x^2+y^2+z^2)ds$$

dove

$$\gamma : [0,2\pi] \ni t \to (3\cos t, 3\sin t, 4t).$$

Esercizio 2 Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ dove $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ ed $f(x,y) = x^2ye^{-(x^2+y^2)}$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdydz$$

dove

$$A = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 2, x^2-z^2+y^2 \leq 0, z \geq 0\}.$$

Soluzioni

Esercizio 1 Usando la definizione

$$\int_\gamma x(x^2+y^2+z^2)ds = \int_0^{2\pi} 3\cos t(9+16t^2)\sqrt{9(\cos t)^2+9(\sin t)^2+16}dt$$

$$= 15\int_0^{2\pi}\cos t(9+16t^2)dt = 15\times 16\int_0^{2\pi}\cos tt^2 = 15\times 16([(\sin t)t^2]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\sin t)$$

$$= 15\times 16\times 2[[(\cos t)t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos t] = 15\times 16\times 4\pi = 960\pi.$$

Esercizio 2

Imponendo la condizione $\nabla f(x,y) = (0,0)$ troviamo come soluzioni $(0,y)$ con y arbitrario e $(\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ma gli unici punti tra questi, che stanno in A sono $(0,y)$ con $y \in [-1,1]$. D' altra parte su questi punti la funzione f vale zero che non puo' essere massimo e neppure di minimo, poiche' f puo' assumere sia valori positivi che valori negativi (a tal fine basta considerare la parte della funzione data da x^2y). Studiamo quindi la funzione sulla frontiera e usiamo la parametrizzazione $[0,2\pi] \ni t \to (\cos t, \sin t)$ e osservaimo che $f(\cos t, \sin t) = e^{-1}\cos^2 t \sin t$. Resta quindi da calcolare $\max_{[0,2\pi]} e^{-1}\cos^2 t \sin t$ e $\min_{[0,2\pi]} e^{-1}\cos^2 t \sin t$, e tali valori concideranno con il max e min assoluto di f su A poiche' abbiamo gia' escluso che ci siano max e min assoluti all' interno di A. Studiando la derivata della funzione $g(t) = \cos^2(t)\sin t$, troviamo $g'(t) = \cos^3(t) - 2\sin^2(t)\cos t = 3\cos^3(t) - 2\cos t$ e si vede che si annulla nei punti $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ e anche nei punti t tali che $\cos^2(t) = \frac{2}{3}$. Poiche' $g(t)$ si annulla in $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ e siccome max e min non possono essere nulli (per quando detto sopra) abbiamo che max e min di g sono raggiunti nei punti in cui $\cos^2(t) = \frac{2}{3}$ ed in questi punti abbiamo che g vale $\pm\frac{2e^{-1}}{3\sqrt{3}}$. Quindi questi sono il max ed il min cercati.

Esercizio 3

Usando le coordinate cilindriche abbiamo che l'integrale dato si riduce a

$$\int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{\rho(z)} \Big(\int_0^{2\pi} \rho\cos^2(\theta)d\theta\Big)d\rho\Big)dz$$

dove

$$\rho(z) = \min\{\sqrt{2-z^2}, z\}$$

quindi $\rho(z) = z$ se $0 < z < 1$ e $\rho(z) = \sqrt{2-z^2}$ se $1 < z < \sqrt{2}$. Quindi, ricordando che $\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta = \pi$, il nostro integrale si riduce a

$$\pi\int_0^1 \Big(\int_0^z \rho d\rho\Big)dz + \pi\int_1^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho d\rho\Big)dz$$

$$= \frac{\pi}{6} + \pi(\sqrt{2}-1) - \pi\Big(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{1}{6}\Big) = 2\pi\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\Big)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

24 Luglio 2017

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=280231