PARTE A

1. L' area della regione piana Ω, dove

$$\Omega = \{(x,y)|(x-7)^2 + (y-7)^2 \leq 1, y > x, y > 7\}$$

vale:

A: $\frac{\pi}{3}$ B: $\frac{2\pi}{3}$ C: $\frac{\pi}{2}$ D: $\frac{3\pi}{8}$ E: N.A.

2. Il volume di Ω, dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 < 1, x \cdot y > 0, z > 0\}$, vale:

A: $\frac{\pi}{3}$

B: $\frac{\pi}{4}$ C: N.A. D: $\frac{3\pi}{4}$ E: $\frac{2\pi}{3}$

3. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}) - \sqrt{x^2+y^2}}{(|x|+|y|)}$ vale

A: 2 B: 3 C: N.E. D: 0 E: N.A.

4. Sia data nel piano (x,z) la regione

$$\Omega = \{(x,z)|x^2 + z^2 < 16, x^2 + (z-3)^2 > 1, x > 0\}$$

Il volume della regione ottenuta ruotando Ω intorno all' all' asse z vale:

A: N.A. B: 84π C: 70π D: 62π E: 80π

5. Il seguente $\int\int\int_\Omega x dx dy dz$ dove

$$\Omega = \{(x,y,z)| \max\{|x|,|y|,|z|\} < 1, \min\{x,y,z\} > 0\}$$

vale

A: N.A. B: 1 C: 1/2 D: 2 E: 4

6. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(\sqrt{\cos(xy)})$, allora $\frac{\partial^4}{\partial_x^2 \partial_y^2} f(0,0)$ vale

A: -2 B: 1 C: N.A. D: 2 E: -1

7. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |x^4 + \cos y|$ nel punto $(0,0)$ vale

A: N.A. B: $(0,1)$ C: N.E. D: $(0,0)$ E: $(1,0)$

8. Sia data la funzione $f(x,y) = \cos(xy)$. Allora il punto $(0,0)$ e':

A: N.A. B: max assoluto C: punto di sella D: min assoluto E: min relativo

9. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+y^4}{x^4 y^2}$ vale:

A: N.E. B: -1 C: $\frac{1}{2}$ D: N.A. E: 0

10. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sin(xy)}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vale

A: 2 B: N.A. C: 1/2 D: 1 E: N.E.

CODICE=825220

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

03 Febbraio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=825220

COMPITO BIOMEDICA ANALISI II

DEL 03-02-2017

1) Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dove

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\, \ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f nei punti di $\mathbb{R}^2$.

---

2) Calcolare il seguente integrale di prima specie:

$$\int_\gamma x(y+1)\, ds$$

dove $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x=0,\ x+y \geq 2\}$

---

3) Sia $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ (x-1)^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

e sia $\vec{F}(x,y,z)$ il campo (x,y,z).

Calcolare il flusso di $\vec{F}$ lungo il $\partial\Omega$ orientato lungo la normale esterna.

<u>Sol.</u> Ovviamente f è C^∞ fuori dagli assi. Inoltre, dalla cont delle funzioni $|\cdot|$, $\ln$, $\sqrt{\ }$ si ha che la funzione è certamente continua fuori da $(0,0)$.

Verifichiamo inoltre che è cont. in $(0,0)$, infatti si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|}\,\ln(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to 0} \rho\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}\,(\ln\rho^2)$$

$$= 0 = f(0,0).$$

Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$

Studiamo la differenziabilità in $(0,0)$.

Abbiamo che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ quindi

f è diff in $(0,0)$ $\iff \exists \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|h||k|}\,\ln(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim\limits_{\rho\to 0} \sqrt{|\cos\alpha||\sin\alpha|}\,\ln \rho^2$ e questo limite $\nexists$.

Quindi f non è diff. in $(0,0)$.

Studiamo differenziabilità in $(x_0,0)$ con $x_0 \neq 0$!

Siccome f è nulla sugli assi abbiamo

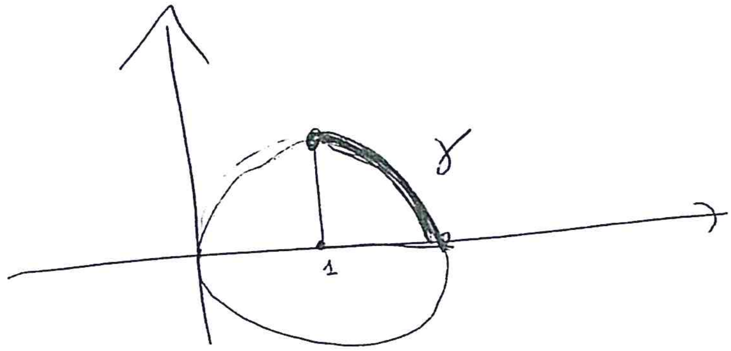
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{|h|}\sqrt{|x_0|}\,\ln(x_0^2+h^2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{|x_0|}\,\ln(x_0^2)\,\dfrac{\sqrt{|h|}}{h}$

e ovviamente questo limite $\nexists$.

Sol. La curva γ è una porzione della circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1:



quindi possiamo usare la parametrizzazione

$$\theta \longrightarrow (1+\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

Pertanto $\displaystyle\int_\gamma x(1+y)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\Big[\cos(2\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{4}\Big[\cos\pi - \cos 0\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 + \frac{1}{2}.$$

Sol. Usando il teorema della divergenza basta calcolare

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = 3 \operatorname{Vol}(\Omega).$$

Con semplici considerazioni abbiamo:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

dove $\Omega_1 = \left\{ (x,y,z) \mid 0 < x < \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 + (x-1)^2 \leq 1 \right\}$

$$\Omega_2 = \left\{ (x,y,z) \mid \tfrac{1}{2} < x < 1,\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

È anche facile vedere che per simmetria $\operatorname{Vol}(\Omega_1) = \operatorname{Vol}(\Omega_2)$ ed inoltre usando la riduzione per sezioni:

$$\operatorname{Vol}(\Omega_2) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{(y^2+z^2) \leq 1-x^2} dy\,dz = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx\,(1-x^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\left[x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{24} = \frac{12-8+1}{24} = \boxed{\frac{5}{24}\pi}.$$

Quindi $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{5}{24} \pi.$