Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 21 Febbraio 2019

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indicheremo con $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ il vettore nullo e con B_R la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata nell'origine di raggio R. Provare il seguente fatto:

$\forall \varphi \in C^0(\partial B_R, \mathbb{R}) \quad \exists! M \in \mathbb{R}$ tale che il seguente problema ammette soluzione

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \forall x \in B_R \setminus \{\vec{0}\} \\ u \in C^2(B_R \setminus \{\vec{0}\}) \cap C^0(\bar{B}_R) \\ u(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \partial B_R, \\ u(\vec{0}) = M. \end{cases}$$

Esercizio 2 Ricordiamo che $L^{1,\infty}$ indica lo spazio delle funzioni L^1-deboli definite su $\mathbb{R}^n$. Provare che vale la seguente disuguaglianza:

- per ogni $f_1, ..., f_N \in L^{1,\infty}$ si ha

$$|f_1 + ... + f_N|_{L^{1,\infty}} \le N \sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

  dove $|g|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \mathcal{L}\{|g(x)| > \lambda\}$ avendo indicato con $\mathcal{L}$ la misura di Lebesgue;

- provare che esiste $C > 0$ (indipendente da N) tale che

$$|f_1 + ... + f_N|_{L^{1,\infty}} \le C \ln(2 + N) \sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

Soluzioni

Sol. Esercizio 1

Per l'esistenza di M basta considerare $M = u_\varphi(\vec{0})$ dove u_φ e' l'estensione armonica di φ su B_R. Per l'unicita' basta osservare che se u_{M_1} fosse un'altra soluzione (con $u_{M_1}(\vec{0}) = M_1$), allora $u_{M_1} - u_\varphi$ sarebbe limitata su B_R ed armonica su $B_R \setminus \{\vec{0}\}$. Quindi per un teorema visto a lezione si potrebbe estendere ad una funzione armonica su B_R. Essendo $u_{M_1} - u_\varphi$ nulla al bordo, allora necessarimanete $u_{M_1} = u_\varphi$ su B_R e quindi $M_1 = u_{M_1}(\vec{0}) = u_\varphi(\vec{0}) = M$.

Sol. Esercizio 2

Per il primo punto basta osservare che

$$\{|f_1 + ... + f_N| > \lambda\} \subset \cup_{i=1,...,N}\{|f_i| > \frac{\lambda}{N}\}$$

e quindi

$$\{|f_1 + ... + f_N| > \lambda\} \leq \frac{N}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}.$$

Per il secondo punto introduciamo per $i = 1, ..N$ e per ogni $\lambda > 0$ fissato:

$$h_i = f_i \times \chi_{\{|f_i| > \frac{\lambda}{3}\}}, g_i = f_i \times \chi_{\{\frac{\lambda}{3N} < |f_i| \leq \frac{\lambda}{3}\}}, l_i = f_i \times \chi_{\{|f_i| \leq \frac{\lambda}{3N}\}}.$$

Allora

$$\{|f_1 + ... + f_N| > \lambda\} \subset$$

$$\{|h_1 + ... + h_N| > \frac{\lambda}{3}\} + \{|g_1 + ... + g_N| > \frac{\lambda}{3}\} + \{|l_1 + ... + l_N| > \frac{\lambda}{3}\}$$

Il terzo insieme e' vuoto. Per il primo insieme abbiamo

$$\{|h_1 + ... + h_N| > \frac{\lambda}{3}\} \subset \cup_{i=1,...,N}\{|h_i| > \frac{\lambda}{3N}\} = \cup_{i=1,...,N}\{|f_i| > \frac{\lambda}{3}\}$$

$$\leq \frac{3}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

Per stimare il secondo insieme osserviamo che

$$\|g_i\|_{L^1} = \int_0^\infty \mathcal{L}\{|g_i| > \mu\} d\mu$$

$$= \int_0^{\frac{\lambda}{3N}} \mathcal{L}\{|g_i| > \mu\} d\mu + \int_{\frac{\lambda}{3N}}^{\frac{\lambda}{3}} \mathcal{L}\{|g_i| > \mu\} d\mu + \int_{\frac{\lambda}{3}}^{\infty} \mathcal{L}\{|g_i| > \mu\} d\mu.$$

Guardando alla definizione di g_i e' facile dedurre che il terzo integrale e' nullo, il primo e' uguale a

$$\int_0^{\frac{\lambda}{3N}} \mathcal{L}\{|f_i| > \frac{\lambda}{3N}\} d\mu \leq |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

ed infine il secondo integrale si stima come segue

$$\int_{\frac{\lambda}{3N}}^{\frac{\lambda}{3}} \mathcal{L}\{|g_i| > \mu\} d\mu \leq \int_{\frac{\lambda}{3N}}^{\frac{\lambda}{3}} \mathcal{L}\{|f_i| > \mu\} d\mu \leq |f_i|_{L^{1,\infty}} \int_{\frac{\lambda}{3N}}^{\frac{\lambda}{3}} \frac{1}{\mu} d\mu = \ln N |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

Pertanto abbiamo per Minkowski che

$$\|g_1 + ... + g_N\|_{L^1} \leq C \ln N \sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}$$

e quindi per Chebichev

$$\mathcal{L}\{|g_1 + ... + g_N| > \frac{\lambda}{3}\} \leq \frac{3\|g_1 + ... + g_N\|_{L^1}}{\lambda} \leq C \frac{\ln N}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} |f_i|_{L^{1,\infty}}.$$

Si puo' ora dedurre la stima desiderata.