Analisi 2 Ingegneria Biomedica $27 - 07 - 2020$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.

Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Data la funzione $f(x, y) = \cos(x^2+y^2)\sin(x^2-y^2)$. Dire se il punto $(0, 0)$ e' di: max assoluto, min assoluto, max locale ma non max assoluto, min locale ma non min assoluto, sella.

Esercizio 2 Dire quanto vale il gradiente di $f(x, y) = \sqrt{|1 + x + y|}$ nel punto $(0, 0)$. (Scrivere N.E. se pensate che non esiste).

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(\sqrt{x^2+y^2})-\ln(1+x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. (Scrivere N.E. se pensate che non esiste).

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x, y)|0 < y < x, (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Esercizio 5 Calcolare $max_K f$ e $min_K f$ dove $f(x, y) = 9y - x^2$ e $K = \{(x, y)|\frac{1}{16} \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Soluzioni

1. Sella. E' facile vedere che $(0,0)$ e' critico. Inoltre in $(0,0)$ il cos vale 1 e il sin si annulla, inoltre il sin diventa negativo nelle vicinanze di $(0,0)$ dove $x^2 - y^2 < 0$ e diventa positivo nelle vicinanze di $(0,0)$ dove $x^2 - y^2 > 0$.

2. $(1/2, 1/2)$. La funzione nelle vicinanze di $(0,0)$ vale $\sqrt{1+x+y}$ (il valore assoluto puo' essere trascurato poiche' nelle vicinanze di $(0,0)$ si ha $1 + x + y > 0$). Quindi il gradiente puo' essere calcolato con le usuali regole di derivazione.

3. N.E. Sviluppando con Taylor il numeratore si trova: $x^2 + y^2 - x^2 + y^2 + o(x^2+y^2)$. Quindi il limite cercato equivale al limite di $\frac{2y^2}{x^2+y^2}$ che non esiste.

4. Possiamo scrivere l' insieme in polari come

$$\{(\rho,\theta)|\theta \in (0, \frac{\pi}{4}), 0 < \rho < 2\cos\theta\}$$

da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3} \times [\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{3} \times [\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12}] = \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{5}{6}$$

5. Non esistono punti critici, quindi tutto avviene sul bordo. Usiamo Lagrange per il primo vincolo $x^2 + y^2 = 16$ e risolvendo i sistemi troviamo i punti $(0, \pm 4)$, analogamnete per il secondo vincolo $x^2+y^2 = \frac{1}{16}$ troviamo $(0, \pm\frac{1}{4})$. Quindi max vale 36, min vale -36.