PARTE A

1. Siano $V = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0, x + y + z = 0\}$ e $W = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 3y - 2z = 0\}$ allora $dim(V + W)$ vale

   A: 1 B: 0 C: N.A. D: 3 E: 2

2. Sia $L : R_{\leq 2}[x] \to R_{\leq 2}[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(1 + x) = x$, $L(1 - x) = 1$, $L(x^2) = 2x^2$. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(1, 1, 2)$ B: N.A. C: $(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, 2)$ D: $(i, -i, 2)$ E: $(\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, 2)$

3. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ allora $detA$ vale:

   A: -1 B: 1 C: 2 D: 0 E: N.A.

4. Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Allora il seguente sottospazio vettoriale delle matrici 3×3

   $$\{A \in Mat(3 \times 3) | A \cdot e_1 = A \cdot e_2\}$$

   ha dimensione

   A: 5 B: N.A. C: 6 D: 4 E: 3

5. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 25}[x] | p(x + 1) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 2 B: N.A. C: 3 D: 1 E: 0

6. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito come segue $L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$. Allora gli autovalori di L sono

   A: (1,2,3) B: $(1, 1, 1)$ C: N.A. D: $(1, 1, 0)$ E: $(1, 0, 0)$

7. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p'(0) = 0 = p'(1)\}$ (qui p' indica la derivata di p) allora $dimV$ vale

   A: 2 B: 4 C: 1 D: N.A. E: 3

8. Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Allora gli autovalori di A sono:

   A: $(1, 3, 3)$ B: N.A. C: $(1, 1, 3)$ D: $(1, 1, 1)$ E: $(-1, 1, 3)$

9. Siano V e W i sottospazi vettoriali di $R_{\leq 3}[x]$ definiti come segue

   $$V = \{p \in R_{\leq 3}[x] | p(1) = 0\}, W = \{p \in R_{\leq 3}[x] | p(1) = p(0)\}$$

   Sia $L : V + W \to \mathbb{R}^8$ lineare, allora $d = dim(ImL)$ soddisfa necessariamente

   A: $d \leq 2$ B: $d \geq 1$ C: $d \leq 4$ D: N.A E: $d \geq 2$

10. Siano $A, B \in mat(n \times n)$ allora $d = rg(A \cdot B)$ (qui rg indica il rango) soddisfa necessariamente:

    A: $d = rgA$ B: $d \leq \min\{rgA, rgB\}$ C: $d = \min\{rgA, rgB\}$ D: $d \geq \min\{rgA, rgB\}$ E: N.A.

CODICE=829533

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

20 Febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=829533

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 20 Febbraio 2019

Cognome:__________________________________ ,
Nome:______________________________________

Matricola:___________________________

Esercizio 1
Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \beta \\ x + y + \alpha z = \beta^2 \end{cases}$$

ammette una soluzione unica, ammette infinite soluzione oppure non ammette soluzioni.

Esercizio 2 Per ogni $k \in \mathbb{R}$ consideriamo i polinomi seguenti $p_k(t) = t^3 + kt^2, q_k(t) = t^2 + t + 3, r_k(t) = t^3 + (k+1)t^2 + t + k$. Dire per quali valori di k i polinomi p_k, q_k, r_k sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$.

Esercizio 3 Fissato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, introduciamo il seguente sottoinsieme delle matrici 3×3:

$$V_x = \{A \in mat(3 \times 3) | A \cdot x = 0\}.$$

- Dire se V_x e' un sottospazio vettoriale di $mat(3 \times 3)$
- In caso affermativo calcolare $dim V_x$.

Sol. Esercizio 1 Osserviamo che per i valori di α per cui il seguente determinante e' diverso da zero si ha esistenza ed unicita' per ogni β:

$$0 \neq det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^3 + 2 - 3\alpha = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$$

Resat quindi da studiae i casi $\alpha = 1, -2$. Nel primo caso il sistema si riduce a tre equazioni $x + y + z = 1, x + y + z = \beta, x + y + z = \beta^2$ quindi per $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ non esistono soluzioni, mentre per $\alpha = \beta = 1$ esistono infinite soluzioni. Nel caso $\alpha = -2$ scriviamo la matrice completa

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & \beta^2 \end{pmatrix},$$

che con mosse elementari si riduce a

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\beta + 1 \\ 1 & 1 & -2 & \beta^2 \end{pmatrix},$$

e poi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\beta + 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2\beta^2 + 1 \end{pmatrix},$$

ed infine

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\beta + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta^2 + 2\beta + 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi se $\alpha = -2$ non ci sono soluzioni poiche' $2\beta^2 + 2\beta + 2 > 0$.

Sol. Esercizio 2

La matrice associata alla terna di polinomi (rispetto alla base canonica) e'

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & k + 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bisogna vedere per per quali k si ha rango 3. Calcolando i det dei tre minore 3×3 si trovano i seguenti valori: $k(3-k), 3-k, 0$ e quindi solo per $k = 3$ abbiamo rango minore di 3.

Sol. Esercizio 3

Ovviamente V_x e' uno spazio vettoriale essendo chiuso rispetto a somma e prodotto per scalare (cosa che si verifica facilmente). Per calcolarne la dimensione consideriamo la mappa

$$L_x : mat(3 \times 3) \ni A \to A \cdot x \in \mathbb{R}^3$$

Allora

$$dim V_x = dim(ker L_x) = 9 - dim(Im L_x).$$

Dico che L_x e' surgettiva e quindi $dim(Im L_x) = 3$ da cui $dim V_x = 6$. Per provare che L_x e'surgettiva basta mostrare che per ogny $y \in \mathbb{R}^3$ esistono tre vettori z_1, z_2, z_3 in $\mathbb{R}^3$ tali che $y = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3$. A tal fine basta osservare che possiamo assumere per ipotesi $x_1 \neq 0$ (altrimenti basta ragionare con x_2, x_3) ed osservare che $y = x_1 z_1$ dove

$$z_1 = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} \\ \frac{y_2}{x_1} \\ \frac{y_3}{x_1} \end{pmatrix} \text{ dove } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin\sqrt{x^4+y^4}$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

   A: non esiste B: $(0,0)$ C: $(0,1)$ D: N.A. E: $(1,0)$

2. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln(1+x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}$ vale:

   A: 1 B: $\frac{1}{2}$ C: N.A. D: N.E. E: 0

3. Sia
$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+2y^2+3z^2 \le 1, x\cdot y < 0, z > 0\}$$
   allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ B: $\frac{4\pi}{3\sqrt{6}}$ C: $\frac{2\pi}{3\sqrt{6}}$ D: $\frac{\pi}{3\sqrt{6}}$ E: N.A.

4. Il seguente integrale
$$\int\int_\Omega |x| dxdy$$
   con
$$\Omega = \{(x,y)| \max\{|x|,|y|\} < 1, x^2+y^2 > 1\}$$
   vale:

   A: $\frac{5}{3}$ B: $\frac{1}{3}$ C: $\frac{2}{3}$ D: $\frac{4}{3}$ E: N.A.

5. Il seguente integrale
$$\int\int\int_\Omega x dxdydz$$
   dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1, x\cdot y\cdot z < 0, z > 0\}$ vale

   A: 2 B: 1 C: 2π D: N.A. E: 0

6. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}$$
   vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: 2 C: 0 D: 1 E: N.A.

7. Data la funzione $f(x,y) = \ln(1+\sin[(x-y)^2])$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial^2 y}(0,0)$ vale

   A: -12 B: 1 C: 8 D: 2 E: N.A.

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(x^2+y^2)}{\sin(x^4+y^4)}$ vale

   A: -1 B: 1 C: N.E. D: N.A. E: 0

9. L'integrale
$$\int\int_\Omega \max\{y,x\} dxdy$$
   dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, \max\{x,y\} \le 1, \min\{x,y\} > 0\}$ vale:

   A: $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B: N.A. C: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E: $\frac{2}{3}$

10. Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = \sin(x^2+y^2-2xy)$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

    A: max locale B: N.A. C: min locale ma non min assoluto D: sella E: min assoluto

CODICE=157709

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

20 Febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=157709

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 04 Febbraio 2019

Cognome:_________________________________ ,
Nome:__________________________________

Matricola:__________________________

Esercizio 1
Sia data la funzione
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1.$$
Trovare i punti critici e studiarne la natura (ossia dire se si tratta di sella, max locale, min locale, max assoluto, min assoluto).
Esercizio 2
Siano $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ due funzioni regolari, provare che per ogni $R > 0$ si ha
$$\int\int_{B_R} [v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}] dxdy = \int_{\partial B_R} v(\nabla u \cdot \vec{n}) dS$$
dove $B_R = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}$, $\partial B_R = \{(x,y)|x^2+y^2 = R^2\}$, $\vec{n}$ indica la normale esterna a ∂B_R.

Esercizio 3
Calcolare il seguente integrale triplo
$$\int\int\int_T \frac{z(x^2+y^2)}{1+z^2} dxdydz$$
dove
$$T = \{(x,y,z)|0 \leq z \leq \sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}} \leq 1\}$$

Esercizio 1
La funzione in $(0,0)$ non ammette gradiente, quindi $(0,0)$ non puo' essere critico. Calcolando il gradiente si trova

$$\nabla f(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y)$$

da cui i punti critici sono $(0, \pm\frac{1}{2})$. Calcolando l'hessiano si trova $Hf(0,\pm\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ che e' indefinita, quindi i punti sono di sella.

Esercizio 2
Osserviamo che $\partial_x(v\partial_x u) = \partial_x v \partial_x u + v\partial_x^2 u$ e analogamente $\partial_y(v\partial_y u) = \partial_y v \partial_y u + v\partial_y^2 u$ e quindi

$$v(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + \partial_x v \partial_x u + \partial_y v \partial_y u = \partial_x(v\partial_x u) + \partial_y(v\partial_y u)$$

Si conclude integrando questa identita' su B_R e usando il teorema della divergenza al secondo membro.
Esercizio 3
L'integrale diventa

$$\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}<1} (x^2+y^2)(\int_0^{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}} \frac{z}{1+z^2} dz)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}<1} (x^2+y^2)[\ln(1+z^2)]_0^{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}<1} (x^2+y^2)\ln(1+x^2+\frac{y^2}{4})$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}<1} x^2\ln(1+x^2+\frac{y^2}{4}) + \frac{1}{2}\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}<1} y^2\ln(1+x^2+\frac{y^2}{4})$$

$$= \int\int_{x^2+y^2<1} x^2\ln(1+x^2+y^2) + 4\int\int_{x^2+y^2<1} y^2\ln(1+x^2+y^2)$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\ln(1+r^2) + 4\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\theta\ln(1+r^2)$$

$$= 5\pi\int_0^1 r^3\ln(1+r^2) = \frac{5}{2}\pi\int_0^1 t\ln(1+t) = \frac{5}{2}\pi[\frac{t^2}{2}\ln(1+t)]_0^1 - \frac{5}{2}\pi\int\frac{t^2}{2(1+t)}$$

$$= \frac{5}{4}\pi \ln 2 - \frac{5}{4}\pi[\frac{t^2}{2} - t]_0^1 - \frac{5}{4}\pi \ln 2 = \frac{5}{8}\pi$$