Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

14 Settembre 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=111888

PARTE A

1. L' integrale triplo $\int\int\int_\Omega xdxdydz$ dove

$$\Omega = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 < 1, x > 0\}$$

vale

A: $\frac{\pi}{8}$ B: N.A. C: $\frac{\pi}{4}$ D: $\frac{\pi}{2}$ E: $\frac{\pi}{3}$

2. Il gradiente della funzione $f(x, y) = |\sin(|x + y|)|$ nel punto $(0, 0)$ vale

A: $(0, 1)$ B: N.E. C: N.A. D: $(1, 0)$ E: $(1, 1)$

3. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x siny}{x^2+y^2}$ vale

A: N.E. B: -1 C: 1 D: N.A. E: 0

4. Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(\ln(1 + (x + y))$, allora $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)$ vale

A: -1 B: 2 C: -2 D: 1 E: N.A.

5. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(1 + \ln(2 + \cos(xy))$. Allora il punto $(0, 0)$ e'

A: min assoluto B: max assoluto C: N.A. D: max relativo ma non assoluto E: punto di sella

6. Sia data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora $f(x, y)$ nel punto $(0, 0)$ risulta

A: discontinua B: ammette gradiente ma non e' differenziabile C: N.A. D: differenziabile E: non ammette gradiente

7. L' integrale doppio

$$\int\int_T ye^{y^3} dxdy$$

dove T e' il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, vale

A: $\frac{1}{6}(e - 1)$ B: $\frac{1}{3}(e^2 - 1)$ C: $\frac{1}{9}(e - 1)$ D: N.A. E: $\frac{1}{3}(e - 1)$

8. L' integrale $\int\int_\Omega xydxdy$ dove

$$\Omega = \{(x, y)|\min\{x, y\} > -1, \max\{x, y\} < 1, x \cdot y > 0\}$$

vale

A: $\frac{1}{2}$ B: $\frac{1}{4}$ C: N.A. D: $\frac{1}{3}$ E: $\frac{1}{8}$

9. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+(\sin y)^2}{\sqrt{|x|+|y|}} \ln(2 + \sin(e^{(x^2+y^2)})$ vale

A: N.A. B: 0 C: N.E. D: $\ln 3$ E: 1

10. Il gradiente della funzione $f(x, y) = \cos(|x + y|)$ nel punto $(0, 0)$ vale

A: $(-1, 0)$ B: $(1, 0)$ C: N.A. D: $(0, 0)$
E: N.E.

CODICE=111888

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

14 Settembre 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=111888

COMPITO ANALISI II
DEL 14-09-2017

1) Calcolare Area $(A \cap B)$ dove

$$A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \quad e \quad B = \{(x,y) \mid \tfrac{1}{2}x^2+2y^2 \le 1\}$$

2) Calcolare $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$ dove

$\vec{F}(x,y,z) = (x+y,\ z,\ x^2)$ e $\vec{\nu}$ è il versore della normale esterna associata alla seguente parametrizzazione di Σ

$$\varphi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \ni (u,v) \longrightarrow (\cos u, \operatorname{sen} v, v)$$

3) Sia data la funzione

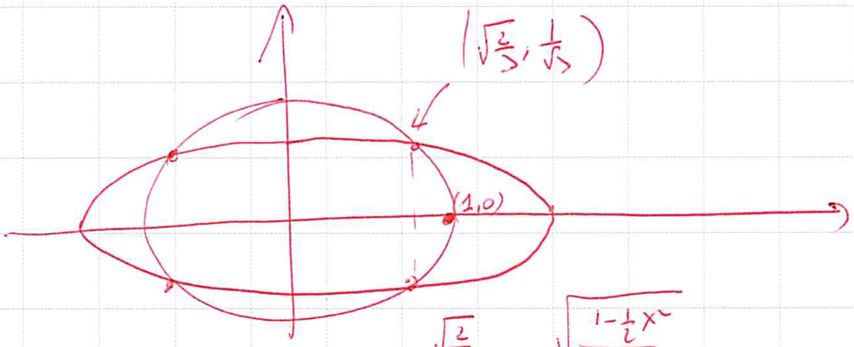
$$f(x,y) = x^4 - x^2 - y^4$$

Trovare i punti critici di f e dire se si tratta di Max loc., Min. loc. oppure sella.

Es. 2 Osserviamo che

$x^2+y^2=1$, $\frac{1}{2}x^2+2y^2=1$ si intersecano in

$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$



Quindi Area $(A\cap B) = 4\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}x^2}{2}}} dy + 4\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$

$$= 4\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{\sqrt{2-x^2}}{2}\,dx + 4\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\,\mathrm{I} + 4\,\mathrm{II}$$

dove

$\mathrm{I} = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \sqrt{2-x^2}$ e $\mathrm{II} = \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

Ricordiamo che

$\mathrm{II} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$ dove $\theta_0 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right) + \frac{1}{4}\left[\sin(2\theta)\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

e

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\theta_1} \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}\;\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$

dove $\theta_1 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

e quindi

$$I = 2\int_0^{\theta_1}\cos^2\theta\, d\theta = \theta_1 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(2\theta)\right]_0^{\theta_1}.$$

Es. 2 Abbiamo che

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos u + \operatorname{sen} v)\cdot 0 + v \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \cdot \cos v \cos^2 u \; du\, dv$$

dove abbiamo usato $\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi = (0, \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} u \cos v)$.

Quindi

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v \operatorname{sen} u \, du\, dv - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \cos v \cos^2 u \, du\, dv$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Es. 3 Si ha che $\partial_x f = 4x^3 - 2x$ e $\partial_y f = -4y^3$

quindi i punti critici sono

$(0,0)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Osserviamo che il punto 0 è di max loc. per la funzione di una variabile $x \longrightarrow x^4 - x^2$

quindi $x^4 - x^2 \leq 0$ se $|x| < \varepsilon_0$. Quindi

$f(x,y) = x^4 - x^2 - y^4 \leq x^4 - x^2 \leq 0$ se $|x| < \varepsilon_0$ e quindi

ho un max locale in $(0,0)$.

Il punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è invece un punto di min. locale per $x \longrightarrow x^4 - x^2$ e quindi

$$f(x,0) = x^4 - x^2 \geq f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{se} \quad \left|x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < \varepsilon_0$$

D'altra parte $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - y^4 < f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ se $y \neq 0$

e quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ è di sella.
Stesso argomento implica $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ è di sella.