Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica — Università di Pisa

Test di Algebra Lineare del 16 giugno 2016 - I turno

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1. Per quali $z \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} z+i+1 & z+1 \\ -z-1 & i-z-1 \end{pmatrix}$? $\boxed{\text{Risposta. } z=-1}$

Il polinomio caratteristico della matrice è $t^2-2it-1$, da cui vediamo che ha un unico autovalore $\lambda = i$ con m.a. = 2. La sua m.g. è $2 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -z-1 & -z-1 \\ z+1 & z+1 \end{pmatrix}$, perciò m.g. = 2 $\Leftrightarrow$ $z=-1$.

2. Trovare una base di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x+7y+5z=0, 4x+6y+z=0\}$. $\boxed{\text{Risp. } \left\{\begin{pmatrix} -23 \\ 17 \\ -20 \end{pmatrix}\right\}}$

X è lo spazio di soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x+7y+5z=0 \\ 4x+6y+z=0 \end{cases}$. Ha 3 incognite e 2 equazioni lin-ind, perciò X ha dim = 1 e il generatore si trova facendo il prodotto vettoriale tra i vettori dei coefficienti.

3. Se $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trovare $[v]_{\mathcal{C}}$. $\boxed{\text{Risp. } [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}}$

Troviamo $v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; per la definizione delle coordinate si ha allora $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. Trovare il vettore di $\mathbb{C}^2$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}$ e avente la seconda coordinata pari a 1. $\boxed{\text{Risp. } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}}$

Il vettore ricercato ha forma $\begin{pmatrix} a+bi \\ 1 \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto hermitiano: $(a-bi)(1+i) + 1 \cdot i = 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+1=0 \end{cases}$, quindi la risposta.

5. Date $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1-x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. $\boxed{\text{Risp. } [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}}$

Dalla formula del cambiamento della matrice di un'appl. lin al cambio di basi:

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine dei primi 45 minuti. Durante i primi 45 minuti non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante i primi 45 minuti sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica — Università di Pisa

Compito di Algebra Lineare del 16 giugno 2016 - I turno

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4k+7 & 4k+3 & 3-4k \\ -5k-8 & -5k-3 & 5k-4 \\ -2k-2 & -2k-1 & 2k \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Trovare l'unico valore di k per cui A_k non è diagonalizzabile.

(B) (3 punti) Per $k = 0$ trovare una base che diagonalizzi A_k.

(C) (2 punti) Stabilire se esiste un k tale che A_k ammetta una base ortonormale di autovettori.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_k : \begin{cases} (k+1)x_1 + x_2 + kx_3 - x_4 = 2k+1 \\ 3x_1 + (k-1)x_2 + 2x_3 - x_4 = k+3 \end{cases}.$$

(A) (2 punti) Dimostrare che F_k è effettivamente un sottospazio affine (*i.e.*, non è vuoto).

(B) (2 punti) Al variare di k determinare la dimensione di E_k.

(C) (2 punti) Al variare di k determinare la dimensione di F_k.

(D) (2 punti) Per $k = 0$ trovare equazioni cartesiane di E_k.

Le soluzioni devono essere scritte in modo più o meno completo

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio non va consegnato. Le soluzioni vanno scritte sui fogli di protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. La brutta non va consegnata. La bella può contenere correzioni. Gli esercizi possono essere svolti in qualsiasi ordine, specificando bene il numero e il punto dell'esercizio.

Svolgimento esercizi del 16/6/16

1.

(A) Troviamo il polinomio caratteristico di A_k:

$$p_{A_k}(t) = \det\begin{vmatrix} t-4k-7 & -4k-3 & 4k-3 \\ 5k+8 & t+5k+3 & 4-5k \\ 2k+2 & 2k+1 & t-2k \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} t-4 & -4k-3 & -6 \\ 5-t & t+5k+3 & t+7 \\ 1 & 2k+1 & t+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \det\begin{vmatrix} t-4 & -4k-3 & -6 \\ 1 & t+k & t+1 \\ 1 & 2k+1 & t+1 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} t-4 & -4k-3 & -6 \\ 0 & t-k-1 & 0 \\ 1 & 2k+1 & t+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-k-1)\det\begin{pmatrix} t-4 & -6 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} = (t-k-1)(t^2-3t+2),$$ perciò gli

autovalori sono $k+1$, 2, 1. Perché A_k non sia diagonalizzabile, devono esserci 2 autovalori uguali. Le uniche possibilità sono:
$k+1=2 \iff k=1$
$k+1=1 \iff k=0$.

Se $k=1$, la matrice è $\begin{vmatrix} 11 & 7 & -1 \\ -13 & -8 & 1 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ e ha autovalore 2 con m.a. $=2$. Perciò

$$m.g.(2) = 3 - \underbrace{rg\begin{vmatrix} -9 & -7 & 1 \\ 13 & 10 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{ha sottomatrice } 2\times 2 \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ con}}.$$

$\det = 3 \neq 0$. Perciò $m.g.(2) = 1$, e A_1 non è diagonalizzabile.
$\Rightarrow rg = 2$

Poiché il k per cui A_k non è diagonalizzabile, è unico, abbiamo che 1 è il valore cercato.

$\boxed{\text{Risposta: } k=1}$

(B) Per $k=0$ la matrice è $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -8 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e ha autovalori

1 con m.a. = 2 e 2 con m.a. = 1.

$\underline{\lambda = 1}$ Cerchiamo due autovettori lin-ind. Essi sono una base dello spazio di soluzioni del sistema omogeneo con la matrice $\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -8 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ossia dell'equazione

$2x+y+z=0$. Esprimendo $z=-2x-y$, troviamo due generatori del suo spazio di soluzioni: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda = 2}$ Cerchiamo un autovettore. Esso è una soluzione non nulla del sistema omogeneo con la matrice

$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 8 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Osserviamo che la matrice ha rango 2,

perciò possiamo scartare un'equazione, ottenendo il sistema $\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 5x+3y+3z=0 \end{cases}$. (osserviamo infatti che le 2 equazioni scelte non sono proporzionali). Essendoci 3 incognite, possiamo trovare una soluzione non nulla facendo il prodotto vettoriale dei vettori di coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\underline{\text{Risposta.}} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}$$

(C) A_k ammette una base ortonormale di autovettori $\Leftrightarrow$ è simmetrica (segue dal teorema spettrale). Dobbiamo avere $4k+3=-5k+8 \Leftrightarrow k=\frac{5}{9}$ e $3-4k=-2k-2 \Leftrightarrow$

$k = \frac{5}{2}$. Ciò è impossibile.

$\boxed{\text{Risposta. Tale } k \text{ non esiste.}}$

2.

(A) Vediamo che F_k contiene $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, per cui $F_k \neq \emptyset$.

(B) $\dim(E_k) = rg \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & k+1 \\ k+1 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Prendiamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} k & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ con $\det = 2-2k$. Se $k \neq 1 \Rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow rg = 2$ per il teorema degli orlati. Se $k=1$, la matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; essa chiaramente ha rango 1.

$\boxed{\text{Risposta. } \dim(E_k) = \begin{cases} 2, & \text{per } k \neq 1 \\ 1, & \text{per } k = 1. \end{cases}}$

(C) $\dim(F_k) = 4 - rg \begin{pmatrix} k+1 & 1 & k & -1 \\ 3 & k-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Prendiamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k-1 & -1 \end{pmatrix}$; ha $\det = k-2$. Se $k \neq 2 \Rightarrow rg = 2$.

Se $k=2$, la matrice è $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, e il rango è 1.

Risposta $\dim(F_k) = \begin{cases} 2 & \text{per } k \neq 2 \\ 3 & \text{per } k = 2. \end{cases}$

(D) $E_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\-2\end{pmatrix}\right)$.

Risolviamo il sistema: $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -2\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Siccome

$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -2\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & -1\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, ~~il~~ un sistema equivalente è

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3x_3 + x_4}{2} \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$; lo spazio di soluzioni è $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$

Facendo $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\-3 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, troviamo che

$$\boxed{E_0 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{Risposta.}}$$