**Primo compitino di Analisi 2: Ingegneria Civile** $15 - 12 - 2021$

**Esercizio 1**
Descrivere l' insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui la funzione $f(x,y) = e^{|x^2-y^2|}$ risulta differenziabile.

**Esercizio 2**
Dire se esistono ed in caso affermativo calcolare $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$f(x,y,z,) = xyz, \quad K = \{(x,y,z)|x^2+y^4+z^6 \leq 11\}.$$

**Esercizio 3**
Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 + \operatorname{arctg}(xy)$ e studiarne la natura.

## Soluzioni

**Esercizo 1** Osserviamo che nella zona $\{(x,y)|x^2-y^2>0\}$ la funzione $f$ coincide con $e^{x^2-y^2}$ che puo' essere derivata infinite volte con derivate continue e quindi in questa regione la funzione e' differenziabile per il differenziale totale. Stesso argomento si ha nella zona $\{(x,y)|x^2-y^2<0\}$.
Resta quindi da studiare la differenziabilita' nella zona $\{(x,y)|x^2-y^2=0\}$. Fissiamo intanto il punto $(x,y)=(0,0)$. In questo punto il gradiente vale $(0,0)$ poiche' la restrizione di $f$ sugli assi vale $e^{x^2}$ ed $e^{y^2}$ le cui derivate in 0 valgono 0. Pertanto si ha che la differenzibilita' si riduce allo studio del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{|x^2-y^2|}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che equivale allo studio di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(qui abbiamo usato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{|x^2-y^2|}-1}{|x^2-y^2|}=1$ che discende dal limite notevole $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$). Usando le polari abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ e quindi in $(0,0)$ la funzione e' differenziabile.
Resta quindi da studiare la differenziabilita' nei punti $(x_0,y_0)$ tali che $x_0^2=y_0^2$ con $x_0,y_0\neq 0$. Assumiamo per semplicita' $x_0>0$ (allo stesso modo tratteremo $x_0<0$). In questo caso vediamo che non esiste $\partial_x f(x_0,y_0)$. Infatti scriviamo il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{|(x_0+h)^2-y_0^2|}-1}{h}.$$

Osserviamo che per $h>0$ si ha $|(x_0+h)^2-y_0^2|=(x_0+h)^2-y_0^2$ e per $h<0$ si ha $|(x_0+h)^2-y_0^2|=-(x_0+h)^2+y_0^2$ e quindi il limite dato sopra si riduce a limite destro e limite sinistro

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{(x_0+h)^2-y_0^2}-1}{h},\ \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-(x_0+h)^2+y_0^2}-1}{h}$$

e i due limiti sono diversi, infatti per il primo limite abbiamo (usando $x_0^2=y_0^2$)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{2hx_0+h^2}-1}{h}=2x_0,$$

ed per il secondo

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-2hx_0-h^2}-1}{h} = -2x_0.$$

Siccome stiamo assumendo $x_0 > 0$ i limiti sono diversi e quindi non esiste $\partial_x f(x_0, y_0)$ quindi la $f$ non e' differenziabile nei punti $(x_0, y_0)$ tali che $x_0^2 = y_0^2$ ed $x_0 > 0$. Con lo stesso argomento si esclude la differenziabilita' nei punti $(x_0, y_0)$ tali che $x_0^2 = y_0^2$ ed $x_0 < 0$.

**Esercizio 2** L' insieme $K$ e' chiuso, infatti sia $g(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6 - 11$ e supponiamo $g(x_n, y_n, z_n) \leq 0$, $(x_n, y_n, z_n) \to (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ allora usando la continuita' della funzione $g$ si deduce $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \leq 0$ e quindi $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in K$. Inoltre $K$ e' limitato poiche' $K \subset \{(x, y, z) | |x| \leq (11)^{\frac{1}{2}}, |y| \leq (11)^{\frac{1}{4}}, |z| \leq (11)^{\frac{1}{6}}\}$.
Inoltre $f(x, y, z)$ e' continua poiche' e' un monomio, quindi per il teorema di Weiestrass esistono max e min.
Per calcolare max e min cerchiamo i punti interni in cui si annulla il gradiente di $f$. Il sistema da imporre e'

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

che si annulla in $\{(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)\}$. In questi punti la funzione si annulla.
Studiamo il bordo usando la tecnica di moltiplicatori di Lagrange.
Il primo sistema da imporre e' il seguente:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ 6z^5 = 0 \\ x^2 + y^4 + z^6 = 11 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. Passiamo al secondo sistema:

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 4\lambda y^3 \\ xy = 6\lambda z^5 \\ x^2 + y^4 + z^6 = 11 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $x$ la seconda per $y$ e la terza per $z$ troviamo

$$xyz = 2\lambda x^2, xyz = 4\lambda y^4, xyz = 6\lambda z^6$$

e quindi usando queste relazioni insieme alla quarta equazione si ha

$$xyz(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) = 11\lambda \iff \frac{11}{12}xyz = 11\lambda \iff xyz = 12\lambda.$$

Osserviamo che possiamo assumere $x, y, z \neq 0$ altrimenti se anche una sola delle tre coordinate si annulla troveremmo come corrispondenten valore della funzione $f$ il valore nullo che e' gia' stato preso in considerazione guardando ai punti critici interni. Pertanto possiamo dividere per $x$ la relazione trovata $xyz = 12\lambda$ e trovare $yz = 12\frac{\lambda}{x}$ che con la prima equazione del sistema implica: $12\frac{\lambda}{x} = 2\lambda x$. Da questa equazione abbiamo due casi: $\lambda = 0$ oppure $6 = x^2$. Osserviamo che se $\lambda = 0$ allora le prime tre equazioni del sistema corrispondono ai punti in cui si annulla il gradiente di $f$, che abbiamo gia' studiato. Quindi possiamo assumere $x^2 = 6$. Similmente avremo $12\frac{\lambda}{y} = 4\lambda y^3$ che (in base a quanto detto sopra possiamo assumere $\lambda \neq 0$) implica $y^4 = 3$. Infine avremo $12\frac{\lambda}{z} = 6\lambda z^5$ e quindi, siccome in base a quanto detto sopra possiamo assumere $\lambda \neq 0$, si ha $z^6 = 2$. Quindi i punti trovati sono

$$(\pm(6)^{\frac{1}{2}}, \pm(3)^{\frac{1}{4}}, \pm(2)^{\frac{1}{6}})$$

e pertanto i corrispettivi valori di $f$ sono

$$\{-(6)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{4}}(2)^{\frac{1}{6}}), (6)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{4}}(2)^{\frac{1}{6}})\}.$$

Da un confronto finale si vede che questi valori sono anche il max e il min.

**Esercizio 3** Imponiamo che il gradiente della funzione si annulli, quindi

$$\begin{cases} 2x + \frac{y}{1+x^2y^2} = 0 \\ \frac{x}{1+x^2y^2} = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione la coppia $(0, 0)$. Per studiare la natura di questo punto critico osservaimo che l' Hessiana in $(0, 0)$ corrisponde alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che e' indenfinita, quindi si tratta di un punto di sella.