**Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2019/2020)**

**Prova scritta del 16 Settembre 2020**

Cognome:________________________________ ,
Nome:____________________________________

Matricola:__________________________

## Esercizio 1

Per ogni $n$ siano $\dot{B}_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < |x| < 1\}$ e $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < 1\}$.

- Provare che se $n \geq 3$ ed $u \in C^2(\dot{B}_1^n) \cap L^{\frac{n}{n-2}}(\dot{B}_1^n)$ soddisfa
$$\Delta u = 0 \text{ su } \dot{B}_1^n,$$
allora esiste $u_0 \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $\tilde{u} : B_1^n \to \mathbb{R}$ definita come segue
$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & 0 < |x| < 1 \\ u_0, & x = 0 \end{cases}$$
e' di classe $C^2(B_1^n)$ e soddisfa
$$\Delta u = 0 \text{ su } B_1^n.$$

## Esercizio 2

Provare che il seguente problema di Cauchy ammette al piu' una soluzione $u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$:
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(t,x)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f \in C^2(\mathbb{R}^n), & \partial_t u(0,x) = g \in C^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$
dove $V(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

## 1. Soluzioni

**Esercizio 1**

Per il teorema della media ed Hölder abbiamo

$$|u(x)| = c_n \frac{|\int_{B^n(x,|x|)} u(y)dy|}{|x|^n} \leq C_n \frac{\|u\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(B^n(x,|x|))}|x|^2}{|x|^n} = \frac{o(1)}{|x|^{n-2}}$$

dove abbiamo usato che $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(B^n(x,|x|))} \overset{x\to 0}{\to} 0$. Quindi concludiamo per il teorema di rimozione delle singolarita' quando $n \geq 3$.

**Esercizio 2**

Bisogna provare che se $(f,g) = (0,0)$ allora $u(t,x) = 0$. Lavoreremo per $t > 0$, il caso $t < 0$ e' simile. Moltiplicando l' equazione per $\partial_t u$ troviamo

$$\frac{1}{2}\partial_t(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}\partial_t(\partial_t u)^2 - \partial_{x_i}(\partial_t u \partial_{x_i} u) + \frac{1}{2}\partial_t(V(t,x)u^2) - \frac{1}{2}\partial_t V(t,x)u^2 = 0.$$

Indichiamo ora con $C_R(0)$ il cono di base $B_R(0)$ e di vertice $(0,R)$. Proveremo che per ogni fissato $T > 0$ la soluzione e' nulla su $C_T(0)$. Inoltre per ogni $t \in (0,T)$ indichiamo con $C_T^t(0)$ il cono $C_T(0)$ troncato all' altezza $t$. Integrando su $C_T^t(0)$ ed usando il teorema della divergenza (e ricordadosi quanto fatto a lezione) che i primi tre termini danno un contributo maggiore o uguale a

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,T-t)} |\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{B(0,T)} |\nabla_{t,x}u(0,x)|^2 dxdt$$

e quindi se le condizioni iniziali sono nulle si trova:

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,T-t)} |\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dx \leq \int\int_{C_T^t(0)} V(t,x)u\partial_t u dxdt.$$

Osserviamo infine che $V(t,x) = (V(t,x)+1) - 1$ quindi se chiamiamo $\tilde{V}(t,x) = V(t,x) + 1$ allora

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,T-t)} |\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dx + \int\int_{C_T^t(0)} u\partial_t u dxdt$$

$$\leq \int\int_{C_T^t(0)} \tilde{V}(t,x)u\partial_t u dxdt$$

ed usando ancora la divergenza su $C_T^t(0)$ sul secondo termine a sinistra (che possiamo scrivere come $\frac{1}{2}\int\int_{C_T^t(0)} \partial_t(u^2)dxdt$ e ricordandosi che abbiamo condizioni iniziali nulle) abbiamo che

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,T-t)}(|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2+u^2(t,x))dx \leq \int\int_{C_T^t(0)} \tilde{V}(t,x)u\partial_t u dxdt$$

Quindi se indichiamo con $g(t)=\frac{1}{2}\int_{B(0,T-t)}(|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2+u^2(t,x))dx$ per $t\in(0,T)$ abbiamo $g(0)=0$ ed inoltre usando Fubini e Hölder abbiamo

$$\int\int_{C_T^t(0)} \tilde{V}(t,x)u\partial_t u dxdt$$

$$\leq \sup_{C_T^t(0)}|\tilde{V}|\int_0^t\Big(\sqrt{\int_{B(0,T-s)}(u(s,x)^2)dx}\Big)\Big(\sqrt{\int_{B(0,T-s)}(\partial_t u(s,x))^2dx}\Big)ds$$

$$\leq (\sup_{C_T(0)})|\tilde{V}|\int_0^t g(s)ds.$$

Pertanto per il Lemma di gronwall deduciamo che $g(s)=0$ per ogni $s$ e quindi $u=0$ su $C_T(0)$.