Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 4 Luglio 2018

Cognome:_____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $w \in C(\Omega)$. Provare la seguente equivalenza

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists r(x) > 0 \text{ t.c. } \frac{\int_{B_r(x)} w(y)dy}{vol(B_r(x))} = w(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall 0 < r < r(x)$$

$$\iff w \in C^2(\Omega), \Delta w = 0.$$

Esercizio 2
Ricordiamo che $L^{p,\infty}$ indica lo spazio delle funzioni L^p-deboli. Provare i seguenti fatti:

- per ogni $p \in [1, \infty)$ lo spazio $L^{p,\infty}$ e' uno spazio vettoriale;
- dati $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, provare la seguente implicazione

$$f \in L^{p_1,\infty} \cap L^{p_2,\infty} \Rightarrow f \in L^{p,\infty}, \quad \forall p \in (p_1, p_2).$$

Soluzioni

Sol. Esercizio 1

Una implicazione e'ovvia (da dx verso sx). Proviamo l'altra. Fissata una palla $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ consideriamo $g(x)$ che sia armonica e $g(x) = w(x)$ per $x \in \partial B_R(x_0)$. Allora dico che $w = g$ su $B_R(x_0)$ e siccome questo e' vero per ogni palla contenuta in Ω ne deduciamo che w e' armonica su Ω. Osserviamo che $h = w - g$ gode della proprieta'di avere media nulla su palle di raggio abbastanza piccolo (dipendente da x). Sia quindi M il valore massimo di h su $\overline{B}_R(x_0)$ allora $\{x \in \overline{B}_R(x_0) | h(x) = M\}$ e'chiuso per continuita' ed e' aperto per la proprieta' di media. Quindi $h(x) \equiv M$ su $\partial\overline{B}_R(x_0)$ ma siccome sul bordo $h \equiv 0$ abbiamo che $h(x) \equiv 0$ su $\partial\overline{B}_R(x_0)$. Allo stesso modo si prova che il minimo di h su $\overline{B}_R(x_0)$ e' zero.

Sol. Esercizio 2 Osserviamo che $\{|f+g| > \lambda\} \subset \{|f| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{|g| > \frac{\lambda}{2}\}$ e quindi

$$\lambda^p |\{|f+g| > \lambda\}| \leq 2^p \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^p |\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}| + 2^p \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^p |\{|g| > \frac{\lambda}{2}\}|$$
$$\leq 2^p \sup_\lambda \lambda^p \{|f| > \lambda\} + 2^p \sup_\lambda \lambda^p \{|f| > \lambda\}$$

Inoltre se $c \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\lambda^p |\{|cf| > \lambda\}| = c^p \Big(\frac{\lambda}{c}\Big)^p |\{|f| > \frac{\lambda}{c}\}| \leq c^p \sup_\lambda \lambda^p \{|f| > \lambda\}.$$

Osserviamo inoltre che se $|\lambda| \leq 1$ allora

$$\lambda^p |\{|f| > \lambda\}| \leq \lambda^{p_1} \{|f| > \lambda\} \leq \sup_\lambda \lambda^{p_1} \{|f| > \lambda\} < \infty$$

e che se $|\lambda| > 1$ allora

$$\lambda^p |\{|f| > \lambda\}| \leq \lambda^{p_2} |\{|f| > \lambda\}| \leq \sup_\lambda \lambda^{p_2} \{|f| > \lambda\} < \infty$$

quindi abbiamo che

$$\sup_\lambda \lambda^p |\{|f| > \lambda\}| < \infty.$$