Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 26 Giugno 2019

Cognome:______________________________ ,
Nome:__________________________________

Matricola:________________________

Esercizio 1
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione armonica a valori reali. Per ogni $p \in [1, \infty)$ fissato provare le seguenti implicazioni:

- $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n) \to \exists C \in \mathbb{R}$ t.c. $u(x) = C$;
- $\int \frac{|u|^p}{(\sqrt{1+|x|^2})^{n+p}} dx < \infty \to \exists C \in \mathbb{R}$ t.c. $u(x) = C$.

Esercizio 2
Sia $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ sia $u_v(t,x)$ l'unica soluzione di classe $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla_x v = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Provare i seguenti fatti:

- $\lim_{t\to\infty} \sup_x |u_v(t,x)| = 0 \iff \varphi \equiv 0$;
- $\lim_{t\to\infty} (\sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |u_v(t,x)| dv) = 0$

1. Soluzioni

Esercizio 1
Per il teorema della media e Hölder si ha

$$|\nabla u(0)| = |\fint_{B(0,R)} \nabla u dx| \le CR^{-n} R^{n-\frac{n}{p}} \int |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi passando al limite per $R \to \infty$ si conclude che $|\nabla u(0)| = 0$. Con lo stesso argomento si puo' provare $|\nabla u(x)| = 0$ per ogni x.

Per il secondo punto osserviamo che per l'ipotesi di integrabilita' (ed usando le coordinate sferiche) esiste una successione $R_k \to \infty$ tale che $\int_{S_{R_k}} |u|^p d\sigma = o(R_k^{n+p-1})$. Usando quindi questa informazione ed il teorema della media si ha

$$|\nabla u(0)| = |\fint_{B(0,R_k)} \nabla u dx| = \frac{c}{R_k^n} |\int_{S(0,R_k)} u \nu d\sigma|$$
$$\le \frac{c}{R_k^n} (\int_{S(0,R_k)} |u|^p d\sigma)^{\frac{1}{p}} R_k^{n-1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p}} = o(1)$$

da cui $|\nabla u(0)| = 0$. Analogamente $|\nabla u(x)| = 0$ per ogni x.

Esercizio 2
Si ha la seguente formula $u_v(t,x) = \varphi(x - vt)$. Quindi $\sup_x |u_v(t,x)| = \sup_x |\varphi|$ da cui segue il primo punto.

Per il secondo punto osserviamo che

$$\int |u_v(t,x)| dv = \int |\varphi(x - vt)| dv = \frac{1}{t^n} \int |\varphi|$$

e quindi si conclude.