Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 22 Luglio 2019

Cognome:________________________________ ,
Nome:___________________________________

Matricola:_________________________

Esercizio 1

Sia dato il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ \\ u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n > 0\}$.

Provare che:

- non si ha unicita' della soluzione;
- la soluzione e' unica se si assume $u \in L^\infty(\Omega)$.
  (Sugg: potrebbe essere utile estendere per disparita' $u(x)$ rispetto all' iperpiano $\{x_n = 0\}$).

Esercizio 2

Sia $e^{t\Delta}$ il semigruppo del calore e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Provare che:

- la funzione $\mathbf{R}^+ \ni t \to \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ e' decrescente;
- la funzione $\mathbf{R}^+ \ni t \to \int x e^{t\Delta}\varphi dx \in \mathbb{R}^n$ e' costante.

1. Soluzioni

Esercizio 1

Osserviamo che $u(x) = 0$ ed $u(x) = x_n$ sono due soluzioni distinte del problema di Dirichlet.

Riguardo al secondo punto introduciamo $\tilde{u} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita come segue:

$$\tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), & x_1 \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Se proviamo che $\Delta \tilde{u} = 0$ su $\mathbf{R}^n$ allora possiamo concludere per il teorema di Liouville che $\tilde{u}(x) = const$ e quindi $\tilde{u}(x) = 0$ essendo $\tilde{u} = 0$ su $\partial\Omega$. Resta da provare che $\tilde{u}$ e' armonica su $\mathbb{R}^n$. Si puo' procedere in diversi modi, di seguito una possibilita':
Sia $R > 0$ e consideriamo l'unica soluzione del seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & v \in \mathcal{C}^2(B_R) \cap \mathcal{C}(\overline{B}_R) \\ v(x) = \tilde{u}(x), & x \in \partial B_R \end{cases}$$

Osserviamo che $\tilde{v} = v(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ risolve

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v} = 0, & \tilde{v} \in \mathcal{C}^2(B_R) \cap \mathcal{C}(\overline{B}_R) \\ \tilde{v}(x) = -\tilde{u}(x), & x \in \partial B_R \end{cases}$$

e quindi per unicita' del problema di Dirichlet su B_R si trova $\tilde{v}(x) = -v(x)$. Quindi $v(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = -v(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ e pertanto $v(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ su $\{x \in B_R | x_n = 0\}$. Quindi $v(x)$ risolve

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v} = 0, & \tilde{v} \in \mathcal{C}^2(B_R^+) \cap \mathcal{C}(\overline{B}_R^+) \\ v(x) = u(x), & x \in \partial B_R \text{ e } v(x) = 0, \quad x \in \{(x_1, \dots, x_n) | x_n = 0\}. \end{cases}$$

Da cio' deduciamo, per unicita' della soluzione di Dirichlet su B_R^+ che $u(x) = v(x)$ su B_R^+ e quindi per disparita' $\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x)$.

Esercizio 2

Osserviamo che per una generica $\varphi \in L^1$ abbiamo per una opportuna costante $c > 0$:

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^1} = |\int e^{t\Delta}\varphi dx| = \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int |\int e^{-\frac{(x-y)^2}{t}} f(y) dy| dx$$

$$\leq \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int \int e^{-\frac{(x-y)^2}{t}} |f(y)| dy dx \leq c \int e^{-\frac{(x-y)^2}{t}} \frac{dx}{t^{\frac{n}{2}}} \int |f(y)| dy = \|f\|_{L^1}.$$

Si conclude osservando che se $t > s$ allora $e^{t\Delta}\varphi = e^{(t-s)\Delta} \circ e^{s\Delta}\varphi$ e quindi per quanto visto sopra (dove t viene sostituito da $t-s$ e φ viene sostituito da $e^{s\Delta}\varphi$, allora

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^1} \leq \|e^{s\Delta}\varphi\|_{L^1}, \quad t > s.$$

Per il secondo punto osserviamo che

$$\int x e^{t\Delta}\varphi dx = \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int \int x e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} \varphi(y) dy dx$$

$$= \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int \int (x-y) e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} \varphi(y) dy dx + \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int \int y e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} \varphi(y) dy dx$$

$$= \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int (\int (x-y) e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} dx) \varphi(y) dy + \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int \int y e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} \varphi(y) dy dx$$

$$= c \int z e^{-z^2} dz \int \varphi(y) dy + \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} \int (\int e^{\frac{-(x-y)^2}{t}} dx) y \varphi(y) dy = \int y \varphi(y) dy.$$