Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2019/2020)

Prova scritta del 20 Luglio 2020

Cognome:______________________________ ,
Nome:________________________________

Matricola:_______________________

Esercizio 1

Sia dato il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ u(x) = \varphi(x) \in C(\partial\Omega), \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

dove $\Omega = \mathbb{R}^n \times (a,b)$, $n \geq 1$.

- E' vero o e' falso che (1) ammette al piu' una soluzione?
- E' vero o e' falso che (1) ammette al piu' una soluzione limitata?

Esercizio 2

Provare che per ogni $\varphi(x) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (classe delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$), il seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases}$$

ammette un' unica soluzione nella classe $u(t,x) \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C_0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ dove $C_0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ indica la classe delle funzioni continue su $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, tali che

$$\lim_{\substack{|(t,x)| \to \infty \\ (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n}} u(t,x) = 0.$$

1. Soluzioni

Esercizio 1
In generale non si ha unicita'. Infatti basta ricondursi al caso $\varphi = 0$. Inoltre e' facile vedere che basta trattare il caso $a = 0, b = 1$. In tal caso $e^{x_1} \sin(2\pi x_{n+1})$ e' una soluzione non banale che si annulla sul bordo. Nel caso in assumiamo l' ulteriore proprieta' che $u(t,x)$ sia limitata e nulla sul bordo della striscia $S_0 = \mathbb{R}^n \times [0,1]$, allora per riflessione dispari possiamo estendere la $u(t,x)$ ad una funzione armonica e limitata su $S_0 \cap S_1$ dove $S_1 = \mathbb{R}^n \times [1,2]$. Iterando questa costruzione troveremo una funzione armonica su $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, limitata e nulla al bordo. Ancora una volta per riflessione possiamo estenderla a funzione armonica e limitata su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere per il teorema di Liouville che $u(t,x) = 0$.

Esercizio 2
L' unicita' segue dal fatto che la soluzione, se rientra nella classe richiesta, e' limitata e quindi possiamo applicare un criterio di unicita' visto a lezione.

Per provare l' esistenza basta provare che $v(t,x) = e^{t\Delta}\varphi$ soddisfa le condizioni richieste.

L' unica proprieta' da verificare e' che $v(t,x)$ tende a zero per (t,x) che tendono ad infinito restando nel settore $t > 0$.

A tal fine osserviamo che $v(t,x) \to \varphi$ uniformemente per $t \to 0$ e quindi esistono $\bar{t} > 0$, $R > 0$ tali che $|v(t,x)| \leq \epsilon$ per $|x| > R$, $t \in [0,\bar{t}]$. Inoltre per proprieta' del nucleo $k_t(x)$ si ha che

$$|v(t,x)|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}} \|\varphi\|_{L^1}$$

quindi esiste $\bar{T} > 0$ tale che $|v(t,x)| \leq \epsilon$ per $t > \bar{T}$. Infine per $t \in [\bar{t}, \bar{T}]$ abbiamo che $|v(t,x)| \leq \frac{C}{\bar{t}^{n/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4\bar{T}}} \varphi(y) dy$ e da qui e' facile concludere che esiste $R > 0$ tale che $|v(t,x)| \leq \epsilon$ per $|x| > R$, $t \in [\bar{t}, \bar{T}]$.