Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2019/2020)

Prova scritta del 11 gennaio 2021

Cognome:_______________________________ ,
Nome:__________________________________

Matricola:________________________

Esercizio 1

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione armonica su $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\int_{S_r(0)} |u|^2 d\sigma = o(r^{n-1}) \text{ per } r \to \infty$$

dove $d\sigma$ e' la misura sulla sfera $(n-1)$-dimensionale centrata nell' origine:

$$S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \| \|x\| = 1\}$$

Dedurre che

$$u(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esercizio 2

Provare la seguente versione forte del principio del massimo per l' equazione del calore:

siano $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tali che $f(x) \geq g(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ allora vale una delle seguenti alternative:

$$e^{t\Delta} f > e^{t\Delta} g, \quad \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

oppure

$$f(x) = g(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

1. Soluzioni

Esercizio 1
Usando le coordinate polari si deduce che

$$\int_{B_r(0)} |u(x)|^2 dx = o(r^n)$$

Inoltre dico che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{B_r(x_0)} |u(x)|^2 dx = o(r^n)$$

come si deduce dal fatto che

$$B_r(x_0) \subset B_{r+|x_0|}(0)$$

ed usando la stima fatta per palle centrate nell' origine. Si conclude quindi osservando che per il principio della media

$$|u(x_0)| \leq \fint_{B_r(x_0)} |u(x)| dx \leq C \frac{(\int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}}}{r^n} = \frac{o(r^n)}{r^n} \overset{r \to \infty}{\to} 0$$

Esercizio 2
Per differenza basta provare la proprieta' per $g(x) = 0$. Consideriamo quindi $f(x)$ e supponiamo che $f(x)$ non sia nulla q.o. $x \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta = \{f(x) > \delta\}$ ha misura positiva. Allora abbiamo che

$$e^{t\Delta} f(x) = \int_{B_\delta} K_t(x-y) f(y) dy \geq \int_{B_\delta} K_t(x-y) f(y) dy \geq \delta \int_{B_\delta} K_t(x-y) dy > 0$$

dove abbiamo usato il fatto che $K_t(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e B_δ ha misura positiva.