COMPITO ANALISI 2
ING. CIVILE 03-02-2023

1) Data la funzione $f(x,y) = x^2 \ln(1+y) + x^2 y^2$:

i) rappresentare graficamente il dominio di f

ii) trovare tutti i punti critici di f nel suo dominio

iii) studiare la natura dei punti critici.

2) Calcolare al variare di $r > 0$ il volume di

$$C_r = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \geq r^2, \quad x^2+y^2 \leq z \leq 1\}.$$

3) Sia dato il campo vettoriale

$\vec{F}(x,y,z) = (x+y,\, x+z,\, y)$ definito su $\mathbb{R}^3$:

i) dire se $\vec{F}$ è conservativo ed in caso affermativo calcolarne una primitiva

ii) calcolare il seguente Flusso

$$\text{Flusso}(\vec{F}, \Sigma, \vec{\nu})$$

dove $\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$

e $\vec{\nu}$ rappresenta il versore normale che punta verso l'alto.

Sol.

1) Il dominio è dato da $\{(x,y) \mid y>-1\}$

Scriviamo ora il gradiente di f:

$$\nabla f = \left(2x\ln(1+y) + 2xy^2, \frac{x^2}{1+y} + 2x^2y\right)$$

quindi dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x\left(y^2+\ln(1+y)\right) = 0 \\ x^2\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda eq. abbiamo due casi:

$x=0$ oppure $\frac{1}{1+y} + 2y = 0$ e $x \neq 0$

Nel primo caso abbiamo le sol.

$(0,k) \quad \forall k>-1$

mentre nel secondo caso (essendo $x\neq 0$)

$$\begin{cases} y^2+\ln(1+y) = 0 \\ \frac{1}{1+y} + 2y = 0 \end{cases}$$

La seconda eq. implica

$2y^2+2y+1=0$ che non ha sol.

Quindi gli unici punti critici sono

$(0,k)$. Usiamo il test dell'Hessiana per studiarne la natura:

$$Hf(0,k) = \begin{pmatrix} 2(k^2+\ln(1+k)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il test non si può applicare essendo la matrice semidefinita.

Dobbiamo quindi procedere diversamente per studiare la natura.

A tal fine osserviamo che

$f(0,k) = 0$ ed inoltre

$f(x,y) = x^2[\ln(1+y) + y^2]$

quindi il segno di f è dato dal segno di $\ln(1+y)+y^2$.

Osserviamo che $g(y) = \ln(1+y)+y^2$ è crescente (basta studiare $g'(y)$ ed osservare che è sempre > 0)

Inoltre $g(0)=0$ e quindi abbiamo che

$g(k)>0$ se $k\in(-1,0)$

$g(k)<0$ se $k\in(0,\infty)$

da cui $(0,k)$ è di min. loc. se $k\in(-1,0)$ e di max loc. se $k\in(0,\infty)$.

Se $k=0$ invece si ha che

$g(0)=0$ e $g(y)<0$ se $y<0$ e $g(y)>0$ se $y>0$.

Pertanto se $k=0$ allora $(0,0)$ è di sella.

2) È facile vedere che se $r>1$ l'insieme C_r è l'insieme vuoto.

Per $r\in(0,1)$ possiamo procedere per fili:

$$\mathrm{Vol}(C_r)=\iint_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\left(1-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy \overset{\text{polari}}{=}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_r^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_r^1 = 2\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 - 2r^2 + r^4 \right].$$

3) Il campo vettoriale è irrotazionale e definito su $\mathbb{R}^3$, quindi conservativo. Per calcolare la primitiva che si annulla in $(0,0,0)$ calcoliamo:

$$U(x,y,z) = \oint_{s(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove $s(x,y,z)$ è il segmento da $(0,0,0)$ a (x,y,z).

Usiamo la parametrizzazione di $s(x,y,z)$

$[0,1] \ni t \longrightarrow (tx, ty, tz)$ e quindi:

$$U(x,y,z) = \int_0^1 \left(t(x+y)x + t(x+z)y + tyz \right) dt =$$

$$= \left[x^2 \frac{t^2}{2} + xy \frac{t^2}{2} + xy \frac{t^2}{2} + zy \frac{t^2}{2} + yz \frac{t^2}{2} \right]_0^1 =$$

$= \frac{x^2}{2} + xy + zy$.

Per il calcolo del flusso usiamo il teo. della divergenza aggiungendo il coperchio $C = \{(x,y,z) \mid z=0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

Allora

$$\text{Flusso}(\vec{F}, \Sigma, \vec{\nu}) = \iiint_{\left\{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}\right\}} \operatorname{div} \vec{F} \;-\; \text{Flusso}(\vec{F}, C, -e_3)$$

dove $-e_3$ è la normale a C.

$$\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \iiint 1 = \frac{4}{6}\pi$$

$$\text{Flusso}(\vec{F}, C, -e_3) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} -y \, dx\,dy = 0$$

Quindi il flusso cercato vale $\boxed{\frac{4}{6}\pi}$.