Analisi 2 Ingegneria Civile $19 - 07 - 2021$

Esercizio 1 Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_{\Omega} |1-2z| dxdydz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z)|x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f(x, y, z) = x^2 - xy^2 + z^2$:

- trovare tutti i punti critici di f su $\mathbb{R}^3$;
- calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$ dove $K = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- calcolare $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f$.

Esercizio 3 In un paese ci sono 4 tecnici che riparano televisori. Se si guastano 4 TV in quattro case diverse, qual e' la probabilita' che esattamente due tecnici non ricevano alcuna chiamata per effettuare almeno una riparazione?

SOLUZIONI

Esercizio 1 Risolvendo il valore assoluto l' integrale si spezza come segue:

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega_z}(1-2z)dxdy)dz+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\int_{\Omega_z}(2z-1)dxdy)dz$$

dove

$$\Omega_z=\{(x,y)|x^2+2y^2\leq 1-3z^2\}.$$

Quindi abbiamo

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}}|\Omega_z|(1-2z)dz+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}|\Omega_z|(2z-1)dz$$

dove $|\Omega_z|$ e' la misura di Ω_z che vale $\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-3z^2)$. Pertanto l' integrale cercato diventa

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}}(1-3z^2)(1-2z)dz+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-3z^2)(2z-1)dz$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}}(1-2z-3z^2+6z^3)dz-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-2z-3z^2+6z^3)dz$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}[z-z^2-z^3+\frac{3}{2}z^4]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}[z-z^2-z^3+\frac{3}{2}z^4]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{16})+\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{9})$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{16})-\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{9})$$

$$=2\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{16-8-4+3}{32})+\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{7}{16}+\frac{1}{3})$$

Esercizio 2 Risolviamo il sistema

$$\begin{cases}2x-y^2=0\\-2xy=0\\2z=0\end{cases}$$

e quindi e' facile concludere che i punti critici si riducono a $(0,0,0)$. Per calcolare il massimo e il minimo su K osserviamo che la funzione si annulla sui punti critici. Studiamo quindi il bordo con i moltiplicatori di Lagrange. Il primo sistema si riduce a studiare

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

che non ha soluzione, quindi studiamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

da cui dalla terza equazione $\lambda = 1$ oppure $z = 0$. Nel caso $\lambda = 1$ la prima equazione implica $y = 0$ e quindi resta l' insieme $\{(x, 0, z)|x^2 + z^2 = 1\}$ e su questo insieme la funzione vale 1. Considerando il caso $z = 0$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e quindi dalla seconda equazione abbiamo le alternative $y = 0$ oppure $-x = \lambda$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ e quindi abbiamo $(\pm 1, 0, 0)$ dove la funzione vale 1. Invece se $-x = \lambda$ dalla prima e terza equazione troviamo

$$2x + x^2 - 1 = -2x^2$$

ossia $3x^2 + 2x - 1 = 0$ e quindi $x = \frac{-1\pm 2}{3}$ e quindi $x = -1, \frac{1}{3}$. Pertanto troviamo i punti $(-1, 0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0)$ dove la funzione vale 1 e $\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \times \frac{8}{9} = -\frac{5}{27}$. Osserviamo infine che nel punto critico $\{(0, 0, 0)\}$ la funzione vale 0. Quindi riassumendo il valore massimo vale 1 e il valore minimo vale $-\frac{5}{27}$. Infine osserviamo che $\sup_{\mathbb{R}^3} f = \infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^3} f = -\infty$, come si vede considerando le funzioni di una variabile ottenute restringendo rispettivamente la funzione data su $x = 0, y = 0$ oppure su $x = 1, z = 0$.

Esercizio 3

Siccome ognuna delle 4 persone (a cui si rotta la TV) ha 4 possibilita' di scelta del tecnico, i casi possibili sono 4^4. Per calcolare la cardinalita' dell' evento che ci interessa osserviamo che abbiamo $\binom{4}{2}$ modi di scegliere i tecnici che sono contattati dalle quattro persone, inoltre per ogni scelta dei tecnici chiamati abbiamo che i modi di chiamarli sono 2^4 ma escludiamo da questi casi il caso in cui il tecnico chiamato sia sempre lo stesso, e quindi scendiamo a $2^4 - 2$ possibilita'. Pertanto i casi favorevoli sono $\binom{4}{2}(2^4 - 2) = 6 \times 14$. E quindi la probabilita' cercata vale

$$\frac{6 \times 14}{4^4} = \frac{21}{64}.$$