Analisi 2 Ingegneria Civile $19 - 07 - 2024$

Esercizio 1

Siano dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

- Calcolare per ogni $k \in \mathbb{R}$ la soluzione.
- Dire se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la soluzione risulti non limitata.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS,$$

dove $\Sigma = A \cap B$ con

$$A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2\}, \quad B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

Esercizio 3

Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ e stabilirne la natura (max loc., min loc., sella)

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il polinomio caratteristico associato all' equazione onogenea e' $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, quindi l'equazione lineare omogenea ammette le soluzioni

$$a \sin x + b \cos x$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Per risolvere la non omogenea cerchiamo una soluzione particolare usando il metodo di variazione delle costanti: $w(x) = a \sin x + b \cos x$ dove immaginiamo a, b come funzioni dipendenti da x. Quindi troviamo $w' = a' \sin x + a \cos x + b' \cos x - b \sin x$ ed imponendo $a' \sin x + b' \cos x = 0$ abbiamo $w' = a \cos x - b \sin x$. Calcoliamo ora

$$w'' = a' \cos x - a \sin x - b' \sin x - b \cos x$$

e quindi se vogliamo che w risolva l' equazione assegnata abbiamo

$$a' \cos x - a \sin x - b' \sin x - b \cos x + a \sin x + b \cos x = \sin(2x)$$

e quindi dobbiamo imporre il sistema

$$\begin{cases} a' \sin x + b' \cos x = 0 \\ a' \cos x - a \sin x - b' \sin x - b \cos x + a \sin x + b \cos x = \sin(2x) \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a' \sin x + b' \cos x = 0 \\ a' \cos x - b' \sin x = \sin(2x) \end{cases}$$

ricavando a' dalla prima e sostituendo nella seconda troviamo

$$-b' \frac{\cos^2 x}{\sin x} - b' \sin x = \sin(2x)$$

che equivale a $-b' = \sin x \sin(2x)$ e quindi in particolare possiamo scegliere

$$b = -\int_0^x \sin t \sin(2t) dt = -2 \int_0^x \sin^2 t \cos t dt = -\frac{2}{3} \sin^3 x$$

e quindi per cercare a usiamo l' equazione e ricaviamo

$$a' = -\frac{\cos x}{\sin x} b' = \cos x \sin(2x)$$

da cui in particolare possiamo scegliere a come una qualsiasi primitiva di $\cos x \sin(2x)$, in particolare scegliamo

$$a = -\frac{2}{3}\cos^3 x.$$

Quindi una soluzione particolare dell' equazione completa e' la seguente:

$$w(x) = -\frac{2}{3}(\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x) = -\frac{2}{3}\sin x \cos x = -\frac{1}{3}\sin(2x).$$

Quindi la soluzione generale del problema si scrive come $y(x) = a \sin x + b \cos x - \frac{1}{3}\sin(2x), \quad a, b \in \mathbb{R}$ e quindi se imponiamo $y(0) = 0$ troviamo $b = 0$ e quindi $y(x) = a \sin x - \frac{1}{3}\sin(2x)$ e se imponiamo $y'(0) = k$ troviamo $k = a - \frac{2}{3}$ e quindi la soluzione cerca e'

$$y(x) = (k + \frac{2}{3})\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

E' chiaro che qualunque sia il valore di k queste solutioni sono tutte limitate essendo combinazioni lineari di funzioni trigonometriche.

Esercizio 2

A rappresenta l' unione di due coni simmetrici, attaccati nel vertice comune posto nell' origine, mentre B rappresenta un cilindro pieno. Quindi Σ si puo' esprimere come unione di Σ_+ e Σ_- dove Σ_+ e Σ_- si parametrizzano come segue

$$C \ni (u, v) \to r_+(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

$$C \ni (u, v) \to r_-(u, v) = (u, v, -\sqrt{u^2 + v^2})$$

dove

$$C = \{(u, v) | u^2 + v^2 - 2u \leq 0\}.$$

Quindi si tratta di due superific cartesiane. Calcoliamo l'integrale su Σ_+ (il calcolo su Σ_- sara' simile).

$$\int_{\Sigma_+} (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$$

$$= \int\int_C \left(u^4 - v^4 + v^2(u^2 + v^2) - u^2(u^2 + v^2) + 1\right)\sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} du dv$$

$$= \int\int_C \sqrt{2} du dv = \sqrt{2} Area(C) = \pi\sqrt{2}.$$

L''integrale totale su Σ e' quindi pari a $2\pi\sqrt{2}$ dovendo sommare il contributo di Σ_1 a quello di Σ_2.

Esercizio 3

Imponiamo che il gradiente della funzione si annulli:

$$\begin{cases} 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(16x - 6y) = 0 \\ 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(-6x + 6y) = 0 \end{cases}$$

essendo l'esponenziale una funzione positiva possiamo raccoglierla al fattor comune e otteniamo il sistema equivalente (essendo la funzione esponenziale sempre positiva)

$$\begin{cases} 2(8x^2 - 6xy + 3y^2) + (16x - 6y) = 0 \\ 3(8x^2 - 6xy + 3y^2) + (-6x + 6y) = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che $8x - 3y = -2x + 2y$, ossia $y = 2x$. Sostituiamo ora questa relazione nella prima equazione e troviamo

$$8x^2 - 12x^2 + 12x^2 + 8x - 6x = 0$$

ossia

$$8x^2 + 2x = 0$$

che implica $x = 0$ oppure $x = -\frac{1}{4}$ e quindi da $y = 2x$ troviamo i due punti critici $(0, 0), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. Per verificarne la natura proviamo il test dell' hessiano. Da calcolo diretto abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}16 + 4e^{2x+3y}(16x - 6y) \\ &= e^{2x+3y}(32x^2 - 24xy + 12y^2 + 16 + 64x - 24y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 9e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}6 + 6e^{2x+3y}(-6x + 6y) \\ &= e^{2x+3y}(72x^2 - 54xy + 27y^2 + 6 - 36x + 36y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 6e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) - e^{2x+3y}6 + 2e^{2x+3y}(-6x + 6y) + 3e^{2x+3y}(16x - 6y) \\ &= e^{2x+3y}(48x^2 - 36xy + 18y^2 - 6 - 12x + 12y + 48x - 18y) \end{aligned}$$

La matrice hessiana in $(0,0)$ diventa quindi

$$\begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

quindi la matrice e' definita positiva da cui minimo locale in $(0,0)$. La matrice hessiana in $(-1/4,-1/2)$ diventa:

$$\begin{bmatrix} -e & 15e \\ 15e & 51e \end{bmatrix}$$

quindi la matrice e' indefinita da cui $(-1/4,1/2)$ e' di sella.