Analisi 2 Ingegneria Civile $18 - 07 - 2025$

Esercizio 1

Dire se esistono $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 \text{ e } K = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

In caso affermativo calcolare esplicitamente $\min_K f$ e $\max_K f$.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_A ye^x dxdy$$

dove

$$A = \{(x, y) | y^2 < x < \sqrt{y}\}.$$

Esercizio 3

Si consideri il seguente problema di Cauchy equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 2t \\ y(0) = \alpha, y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Scrivere la soluzione al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la corrispondente soluzione soddisfa

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1

Cerchiamo i punti critici interni, quindi abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x = 0 \\ 3y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Troviamo quindi i punti $(0,0), (0, -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}, 0), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Su tali punti la funzione f assume i valori $0, \frac{4}{27}, \frac{8}{27}$. Studiamo ora il bordo. E' facile vedere che il primo sistema di Lagrange non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Il secondo sistema si scrive come segue:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x = 2\lambda x \\ 3y^2 + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

quindi dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $3x + 2 = 2\lambda$. Nel caso $x = 0$ deduciamo dalla terza equazione $y = \pm 1$ e quindi troviamo i punti $(0, \pm 1)$ dove la funzione f vale 2 e 0. Dalla seconda equazione abbiamo $y = 0$ (e quindi dalla terza equazione $x = \pm 1$ e quindi troviamo i punti $(\pm 1, 0)$ dove la funzione vale 2 e 0) oppure $3y + 2 = 2\lambda$. Restano quindi da analizzare i casi $3x + 2 = 2\lambda$, $3y + 2 = 2\lambda$ che inserite nella terza equazione (dopo aver ricavato x, y in funzione di λ) implicano

$$\frac{(2\lambda - 2)^2}{9} + \frac{(2\lambda - 2)^2}{9} = 1$$

e quindi $2\lambda - 2 = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ ossia $\lambda = 1 \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Ritorniamo ora ad x ed y abbiamo che per questi valori di λ si trovano i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. In tali punti la funzione f vale $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$. Quindi dobbiamo ora confrontare tutti i valori trovati

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, 0, 2, \frac{4}{27}, \frac{8}{27}\}$$

da cui il minimo vale 0 ed il massimo vale 2.

Esercizio 2

Il dominio e' normale rispetto alla variabile x e la condizione $y^2 < \sqrt{y}$ implica $y \in [0,1]$. Quindi l'integrale assegnato si puo' calcolare come segue

$$\int_0^1 (\int_{y^2}^{\sqrt{y}} ye^x dx)dy = \int_0^1 y(e^{\sqrt{y}} - e^{y^2})dy$$

$$= \int_0^1 ye^{\sqrt{y}}dy - \int_0^1 ye^{y^2}dy = \int_0^1 s^2e^s 2s ds - \frac{1}{2}[e^{y^2}]_0^1$$

dove nel primo integrale si e' fatto il cambio di variabile $y = s^2$, e quindi

$$\cdots = 2\int_0^1 e^s s^3 ds - \frac{1}{2}(e-1) = -6\int_0^1 e^s s^2 ds + 2[e^s s^3]_0^1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 12\int_0^1 se^s ds - 6[e^s s^2]_0^1 + 2e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= -12\int_0^1 e^s ds + 12[se^s]_0^1 - 6e + 2e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = -12e + 12 + 12e - 6e + 2e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}e + \frac{25}{2}$$

Esercizio 3

Il polinomio caratteristico dell' equazione omogenea e' $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ le cui soluzioni sono $\frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1$ quindi la soluzione generale dell' omogenea e' $Ae^t + Be^{4t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare della non omogenea utilizzando il metodo della variazione delle costanti. Quindi cerchiamo una soluzione del tipo $A(t)e^t + B(t)e^{4t}$. Da conti espliciti segue che dobbiamo imporre le seguenti condizioni su $A(t), B(t)$:

$$\begin{cases} A'e^t + B'e^{4t} = 0 \\ A'e^t + 4B'e^{4t} = 2t \end{cases}$$

da cui con semplici calcoli possiamo scegliere

$$3A'e^t = -2t$$

ossia $A' = -\frac{2}{3}te^{-t}$, da cui per integrazione $A(t) = \frac{2}{3}(t+1)e^{-t}$; inoltre si ha $B' = \frac{2}{3}te^{-4t}$ da cui $B(t) = -\frac{1}{6}(\frac{1}{4} + t)e^{-4t}$ quindi la soluzione particolare diventa

$\frac{2}{3}(t+1) - \frac{1}{6}(\frac{1}{4}+t) = \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}$ e la soluzione generale $y(t) = Ae^t + Be^{4t} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}$. Fissiamo ora A, B in modo da soddisfare le condizioni di Cauchy e troviamo:

$$\begin{cases} A + B + \frac{5}{8} = \alpha \\ A + 4B + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

e quindi $B = \frac{9-8\alpha}{24}$, $A = \frac{4\alpha-3}{3}$. Quindi la soluzione cercata e'

$$\frac{4\alpha-3}{3}e^t + \frac{9-8\alpha}{24}e^{4t} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}.$$

Dal calcolo classico dei limiti abbiamo che il limite per $t \to +\infty$ vale $+\infty$ se $\frac{9-8\alpha}{24} > 0$ oppure $\frac{9-8\alpha}{24} = 0$ e $\frac{4\alpha-3}{3} > 0$. Quindi abbiamo che il limite per $t \to +\infty$ vale $+\infty$ per $\alpha \in (-\infty, \frac{9}{8}]$.