Analisi 2 Ingegneria Civile $16 - 09 - 2022$

Esercizio 1 Dire, giustificando la risposta, per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge:

$$\int\int_A \frac{e^{xy}}{(x^2+y^2)^a} dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}.$$

Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ lo stesso integrale e' convergente per

$$A = \{(x,y)|x^2+y^2 > 1\}.$$

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A |z| dxdydz$$

dove

$$A = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 4, |z| < 1\}.$$

Esercizio 3 Calcolare in un intorno di $t = 0$ l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t(1+u^2) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Descrivere l' intervallo massimale di esistenza della soluzione $(-T_{min}, T_{max})$ (dove $T_{min}, T_{max} > 0$) e calcolare

$$\lim_{t \to -T_{min}} u(t), \quad \lim_{t \to T_{max}} u(t).$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Osserviamo che esiste $c_0 > 0$ tale che

$$c_0 \leq e^{xy} \leq 1, \quad \forall (x,y) \text{ t.c. } x^2 + y^2 < 1$$

e quindi

$$\frac{c_0}{(x^2+y^2)^a} \leq \frac{e^{xy}}{(x^2+y^2)^a} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^a}, \quad \forall (x,y) \text{ t.c. } x^2 + y^2 < 1$$

da cio' si deduce per confronto che l'integrale assegnato converge sull' insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$ se e solo se converge

$$\int\int_{x^2+y^2<1} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dxdy$$

e dalle lezioni sappiamo che equivale ad imporre $a < 1$. Per studiare invece l'integrale su $\{x^2 + y^2 > 1\}$ osserviamo che

$$\int\int_{1<x^2+y^2<R} \frac{e^{xy}}{(x^2+y^2)^a} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^R \frac{e^{\rho^2 \sin\theta \cos\theta}}{\rho^{2a}} \rho d\rho d\theta$$

e quindi se chiamiamo $0 < b_0 = \min_{\theta \in (\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})} \sin\theta \cos\theta$

$$\int\int_{1<x^2+y^2<R} \frac{e^{xy}}{(x^2+y^2)^a} dxdy \geq \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \int_1^R e^{b\rho^2} \rho^{1-2a} d\rho d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^R e^{b\rho^2} \rho^{1-2a} d\rho \geq d \int_1^R e^{\frac{b}{2}\rho^2} d\rho$$

dove $d = \min_{[1,\infty)} e^{\frac{b}{2}\rho^2} \rho^{1-2a}$. Siccome

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{\frac{b}{2}\rho^2} d\rho = \infty$$

ne deduciamo che l' integrale assegnato diverge su $\{x^2 + y^2 >\}$.

Esercizio 2 L'inetragle dato si puo' svolgere per sezioni e quindi (usando la simmetria del dominio e della funzion integranda rispetto al piano x, y deduciamo che l' inetrgale dato equivale a

$$2 \int_0^1 dz \int\int_{x^2+y^2<4-z^2} z dxdy = 2 \int_0^1 \pi(4 - z^2) z = 2\pi[2z^2 - \frac{1}{4}z^4]_0^1 = \frac{7}{2}\pi.$$

Esercizio 3 L' equazione assegnata e' a variabili separabili e quindi la soluzione si calcola in modo esplicito e coincide con la funzione $\tan(\frac{t^2}{2})$. Dobbiamo considerare quindi il segmento massimale contenuto nel dominio della funzione $\tan(\frac{t^2}{2})$ e contenente $t = 0$. Quindi abbiamo $-\frac{\pi}{2} < \frac{t^2}{2} < \frac{\pi}{2}$ e questo si riduca a $0 \leq t^2 < \pi$ e pertanto l' intervallo massimale di esistenza risulta essere $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$. Da calcolo diretto si vede che