Compito di Analisi 2 del $14-02-2025$, Ingegneria Civile

Esercizio 1

Calcolare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

e studiarne la natura (max/min locale, sella).

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F} : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\} \to \mathbb{R}^3$$

definito come segue

$$\vec{F}(x,y,z) = (z, z, 1 + x + y + \ln z).$$

Dire se il campo e' conservativo e in caso affermativo calcolare la primitiva U tale che $U(0,0,1) = 1$.

Esercizio 3

Calcolare il volume del seguente insieme:

$$\Omega = \{(x,y,z,)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z(1 + x^2 + y^2) \leq xy\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} (2-2x)(2y-y^2)=0 \\ (2x-x^2)(2-2y)=0. \end{cases}$$

Dalla rima equazione ricaviamo che si ha una delle seguenti alternative: $x = 1, y = 0, y = 2$ e quindi sostituendo nella seconda equazione troviamo che per $x = 1$ si ha $y = 1$, per $y = 0$ si ha $x = 0$ oppure $x = 2$, per $y = 2$ si ha $x = 0$ oppure $x = 2$. Quindi i punti critici sono $(1,1), (0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$. Per studiarne la natura calcoliamo la matrice hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -4y+2y^2 & (2-2x)(2-2y) \\ (2-2x)(2-2y) & -4x+2x^2 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo che

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, Hf(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi tutti i punti sono di sella, tranne $(1,1)$ che e' di max locale.

Esercizio 2

Il campo vettoriale e' irrotazionale, inoltre Ω e' covesso e quindi semplicemente connesso. Dalla teoria segue che il campo e' conservativo. Per calcolare la primitiva desiderata procediamo per integrazione. Assegnato il punto (x,y,z) in Ω integriamo il campo $\vec{F}$ lungo il segmento che congiunge (x,y,z) con $(0,0,1)$. tale segmento si parametrizza come segue:

$$[0,1] \ni t \to (tx, ty, (1-t)+tz)$$

e quindi l' inetrgale lungo il segmento diventa

$$\int_0^1 ((1-t)+tz)x + ((1-t)+tz)y + (1+tx+ty+\ln[(1-t)+tz)])(z-1)dt$$

$$= x + \frac{1}{2}x(z-1) + y + \frac{1}{2}y(z-1) + (z-1) + \frac{1}{2}x(z-1) + \frac{1}{2}y(z-1)$$
$$+ \int_0^1 \ln[(1-t)+tz)])(z-1)dt$$
$$= x + y + x(z-1) + y(z-1) + (z-1) + \int_0^{z-1} \ln(1+w)dw$$
$$= (x+y)z + (z-1) + \int_0^{z-1} \ln(1+w)dw$$
$$= (x+y)z + (z-1) + [w\ln(1+w)]_0^{z-1} - \int_0^{z-1} \frac{w}{1+w}dw$$
$$= (x+y)z + (z-1) + (z-1)\ln z - (z-1) + [\ln(1+w)]_0^{z-1}$$
$$= (x+y)z + (z-1)\ln z + \ln z.$$
$$= (x+y)z + z\ln z$$

Esercizio 3

L' insieme puo' essere descritto come insieme normale rispetto all'asse z:

$$\Omega = \{(x,y,z)|(x,y) \in A, 0 \le z \le \frac{xy}{1+x^2+y^2}\}$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \le 1\}.$$

Quindi il volume puo' essere calcolato come segue:

$$\int\int_A (\int_0^{\frac{xy}{1+x^2+y^2}} dz)dxdy = \int\int_A \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$$

ed usando le polari l'ultimo integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^3 \cos\theta \sin\theta}{1+\rho^2} d\rho d\theta = (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\theta)d\theta)(\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho)$$
$$= [-\frac{1}{4}\cos(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+\rho^2)\rho - \rho}{1+\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho - \frac{\rho}{1+\rho^2})d\rho$$
$$= \frac{1}{4}[\rho^2 - \ln(1+\rho^2)]_0^1 = \frac{1-\ln 2}{8}.$$