Compito di Analisi 2 del $13-09-2024$, Ingegneria Civile

Esercizio 1 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente campo vettoriale

$$\vec{F}_\alpha : \Omega \ni (x,y,z) \to (\alpha xz + \frac{yz}{x}, z\ln x - \frac{\alpha^2 y}{2}\ln z, x^\alpha + y\ln x - \frac{y^2}{z})$$

definito sull' insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, z > 0\}$:

- dire per quali valori di α il campo $\vec{F}_\alpha$ e' conservativo;
- sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei valori di α che soddisfano il punto precedente e sia

$$\tilde{\alpha} = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha.$$

  Provare che $\tilde{\alpha} > -\infty$, che il campo vettoriale $\vec{F}_{\tilde{\alpha}}$ e' conservativo e calcolarne tutte le primitive.

Esercizio 2 Dire se esistono $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$$

e

$$K = \{(x,y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

In caso affermativo calcolare $\min_K f$ e $\max_K f$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_\Omega xyz^2 dxdydz$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) | 0 < x < 1, -x < z < x, z+4 < y < 4\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Essendo Ω semplicemente connesso la proprieta' di essere conservativo equivale alla proprieta' di essere irrotazionale. In particolare imponiamo una delle tre condizioni di irrotazionalita'

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha + y\ln x - \frac{y^2}{z}) = \frac{\partial}{\partial z}(\alpha xz + \frac{yz}{x})$$

ossia

$$\alpha x^{\alpha-1} + \frac{y}{x} = \alpha x + \frac{y}{x}$$

e quindi abbiamo due possibilita': $\alpha = 0$, $\alpha = 2$. Nel caso $\alpha = 0$ troviamo il campo

$$\vec{F}_0 = (\frac{yz}{x}, z\ln x, 1 + y\ln x - \frac{y^2}{z})$$

mentre nel caso $\alpha = 2$ troviamo il campo

$$\vec{F}_2 = (2xz + \frac{yz}{x}, z\ln x - 2y\ln z, x^2 + y\ln x - \frac{y^2}{z}).$$

Verifichiamo ora se effettivamente $\vec{F}_0$ e $\vec{F}_2$ sono irrotazionali verificando, per ognuno dei due campi vettoriali, le altre due condizioni che ne garantiscono l' irrotazionalita'. Per $\vec{F}_0$ abbiamo da imporre le due condizioni

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{yz}{x}) = \frac{\partial}{\partial x}(z\ln x)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\ln x) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + y\ln x - \frac{y^2}{z})$$

ma la seconda non e' verificata, quindi $\vec{F}_0$ non e' conservativo. Mentre per $\vec{F}_2$ abbiamo le due condizioni

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xz + \frac{yz}{x}) = \frac{\partial}{\partial x}(z\ln x - 2y\ln z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\ln x - 2y\ln z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y\ln x - \frac{y^2}{z})$$

che sono anche verificate. Quindi $\alpha = 2$ e' l'unico valore per cui il campo risulta conservativo.

Abbiamo verificato che l' insieme $\mathcal{A}$ e' ridotto al solo valore $\alpha = 2$, quindi $\tilde{\alpha} = 2$. Calcoliamo ora le primitive $\vec{F}_2$. Possiamo procedere per integrazione lungo curve che partono da un punto prefissato nel dominio, oppure come segue. Noi cerchiamo le funzioni $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z) = 2xz + \frac{yz}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) = z \ln x - 2y \ln z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) = x^2 + y \ln x - \frac{y^2}{z}$$

da cui deduciamo

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x^2 z + yz \ln x + A(y, z) \\ F(x, y, z) &= zy \ln x - y^2 \ln z + B(x, z) \\ F(x, y, z) &= x^2 z + yz \ln x - y^2 \ln z + C(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

La prima e la terza in (1) implicano

$$A(y, z) = C(x, y) - y^2 \ln z \tag{2}$$

mentre la seconda e a terza implicano

$$B(x, z) = x^2 z + C(x, y) \tag{3}$$

Derivando (3) rispetto ad y troviamo $\frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 0$ e quindi $C(x, y) = C(x)$ e mettendo questa informazione in (2) troviamo $A(y, z) = C(x) - y^2 \ln z$ che derivata rispetto ad x implica $C'(x) = 0$ e quindi C e' una costante. Pertando deduciamo dalla terza di (1) che

$$F(x, y, z) = x^2 z + yz \ln x - y^2 \ln z + C$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 L' insieme K e' chiuso e limitato e la funzione f e' continua, quindi possiamo applicare il teorema di Weiestrass. Per il cacolo esplicit di $\max_K f$ e $\min_K f$ prima studiamo i punti interni di K dove imponiamo il sistema $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo per la prima equazione $x = 0$. Quindi la seconda equaione diventa $\frac{y}{\sqrt{y^2}} + 2y = 0$ ossia $\frac{y}{|y|} + 2y = 0$ che implica $y = 0$ oppure $|y| = -\frac{1}{2}$, quindi $y = 0$. Ma allora abbiamo trovato come unica soluzione $(0, 0)$ che non appartiene a K. Passiamo al bordo che e' co posto dall'unione di due cerchi

$$\partial K = C_1 \cup C_2$$

dove $C_1 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 9\}, C_2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 4\}$. Studiamo prima il vincolo C_1 usando i moltiplicatori di Lagrange studiamo i due sistemi

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

amd

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzione, concentriamoci sul secondo. Dalla prima equazione abbiamo due casi $x = 0$ oppure $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda$. Se $x = 0$ allora dalla terza equazione $y = \pm 3$ e quindi troviamo i punti $(0, \pm 3)$. Nel caso in cui $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\lambda$ allora dalla seconda equazione troviamo

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

da cui $y = 0$ e quindi dalla terza equazione $x = \pm 3$. pertanto troviamo anche i punti $(\pm 3, 0)$. Sul vincolo C_2 abbiamo da riapplicare i moltiplicatori di Lagrange ma i sistemi da risolvere sono identici a quelli precedenti tranne che per il fatto che la condizione $x^2 + y^2 = 9$ va sostituita con $x^2 + y^2 = 4$. Ragioando come sopra si trovano i punti $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$. Quindi i valori di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra i punti $(\pm 2, 0), (0, \pm 2), (\pm 3, 0), (0, \pm 3)$. Siccome $f(\pm 2, 0) = 2 - 1 = 1$, $f(\pm 3, 0) = 3 - 1 = 2$, $f(0, \pm 2) = 2 + 4 - 1 = 5$, $f(0, \pm 3) = 3 + 9 - 1 = 11$. Quindi il massimo vale 11 ed il minimo vale 1.

Esercizio 3 Ragioniamo per sezioni rispetto alla variabile x, quindi descriviamo Ω come segue:

$$\Omega = \{(x, y, z)|0 < x < 1, (y, z) \in \Omega_x\}$$

dove

$$\Omega_x = \{(y,z) | -x < z < x, z+4 < y < 4\}.$$

Quindi dalla formula d'integrazione per sezione si trova

$$\int_0^1 dx (\int_{\Omega_x} xyz^2 dydz)$$

Calcoliamo quindi prima $\int_{\Omega_x} xyz^2 dydz$ al variare di $x \in (0,1)$. Rappresentando Ω_x graficamanete si vede che Ω_x e' un triangolo che si puo' rappresentare come segue:

$$\Omega_x = \{(y,z) | -x < z < 0, z+4 < y < 4\}$$

Sia ha che Ω_x visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2_{y,z}$ e' normale rispetto ad y e puo' essere descritto come segue

$$\Omega_x = \{(y,z) | -x < z < 0, z+4 < y < 4\}$$

$$\int_{\Omega_x} xyz^2 dydz = \int_{-x}^0 (\int_{z+4}^4 xyz^2 dy) dz = \int_{-x}^0 xz^2 [\frac{y^2}{2}]_{y=z+4}^{y=4} dz = \int_{-x}^0 xz^2 (8 - \frac{(z+4)^2}{2}) dz$$

$$= 8x \int_{-x}^0 z^2 dz - \frac{x}{2} \int_{-x}^0 z^2 (z+4)^2 dz = \frac{8}{3} x^4 - \frac{x}{2} \int_{-x}^0 (z^4 + 8z^3 + 16z^2) dz$$

$$= \frac{8}{3} x^4 - \frac{x}{2} (\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3} x^3) = \frac{8}{3} x^4 - \frac{x^6}{10} + x^5 - \frac{8}{3} x^4 = -\frac{x^6}{10} + x^5.$$

Quindi l' integrale si conclude calcolanto

$$\int_0^1 (-\frac{x^6}{10} + x^5) dx = -\frac{1}{70} + \frac{1}{6}$$