Analisi 2 Ingegneria Biomedica $27 - 01 - 2021$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.

Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Calcolare il volume dell' insieme Ω ottenuto ruotando intorno all' asse z il triangolo T nel piano (y, z) avente per vertici i punti $(2, 0), (4, 0), (2, 2)$.

Esercizio 2 Calcolare $\frac{\partial^4 f}{\partial^4 x} f(0, 0)$ dove $f(x, y) = \ln(1 + \sin^2(x + y^2))$.

Esercizio 3 Calcolare l' area della superficie ottenuta ruotando intorno all' asse z il segmento nel piano (y, z) avente come estremi i punti $(4, 0)$ e $(0, 2)$.

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Calcolare l' integrale curvilineo $\int_\gamma xyds$ dove γ e' la curva avente per supporto il seguente insieme

$$\Gamma = \{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x > 0, y > 0\}$$

Esercizio 5 Calcolare

$$\int\int_\Omega \frac{x}{x + y} dxdy$$

dove $\Omega = \{(x, y)|x^2 < y < 4x^2, x > 0, y < 1\}$

Soluzioni

1. $\frac{32}{3}\pi$ si puo' usare Guldino oppure si puo' fare per differenza

2. -20 La formula di Taylor per $\ln(1+t)$ ci dice che
$$f(x,y) = \sin^2(x+y^2) - \frac{1}{2}\sin^4(x+y^2) + o(\sin^4(x+y^2))$$
e sviluppando
$$\sin(x+y^2) = (x+y^2) - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + o((x^2+y^2)^2)$$
si ha
$$f(x,y) = [(x+y^2) - \frac{1}{6}(x+y^2)^3]^2 - \frac{1}{2}[(x+y^2) - \frac{1}{6}(x+y^2)^3]^4 + o((x^2+y^2)^2)$$
$$= (x+y^2)^2 - \frac{1}{3}(x+y^2)^4 - \frac{1}{2}(x+y^2)^4[1 - \frac{1}{6}(x+y^2)^2]^4 + o((x^2+y^2)^2)$$
$$= (x+y^2)^2 - \frac{1}{3}(x+y^2)^4 - \frac{1}{2}(x+y^2)^4 + o((x^2+y^2)^2)$$
e quindi il coefficiente di x^4 vale $-\frac{5}{6}$ e quindi la derivata cercata vale $-4!\frac{5}{6} = -20$.

3. $8\pi\sqrt{5}$ si puo' usare Guldino

4. Usiamo la parametrizzazione $(0, \frac{\pi}{2}) \ni t \to (\cos t, 2\sin t)$ e qindi l' integrale diventa
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t\sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{1+3\cos^2 t}dt$$
$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+3s^2}sds = \int_0^1 \sqrt{1+3w}dw = \frac{2}{9}[(1+3w)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{16}{9}$$

5. Scriviamo Ω come normale rispetto ad x,
$$\Omega = \{(x,y)|0 < y < 1, \frac{\sqrt{y}}{2} < x < \sqrt{y}\}$$
quindi l' integrale dato equivale a
$$\int_0^1 dy(\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \frac{x}{x+y}dx) = \int_0^1 dy(\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} 1dx) - \int_0^1 dy(\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \frac{y}{x+y}dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}dy - \int_0^1 y\ln(\sqrt{y}+y) + \int_0^1 y\ln(\frac{\sqrt{y}}{2}+y)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}dy - \int_0^1 y\ln(\sqrt{y}) - \int_0^1 y\ln(1+\sqrt{y})$$

$$+ \int_0^1 y\ln(\sqrt{y})dy + \int_0^1 y\ln(\sqrt{y}+\frac{1}{2})dy$$

$$= \frac{1}{3}[y^{3/2}]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 y\ln y dy - 2\int_0^1 z^3\ln(1+z)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 y\ln y dy + 2\int_0^1 z^3\ln(\frac{1}{2}+z)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^4}{z+1}dz - \frac{1}{2}[z^4\ln(1+z)]_0^1$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^4}{z+\frac{1}{2}}dz + \frac{1}{2}[z^4\ln(\frac{1}{2}+z)]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_0^1 (z^3 - z^2 + z - 1)dz + \int_0^1 \frac{1}{z+1}dz - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 (z^3 - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{4} - \frac{1}{8})dz - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{16(z+\frac{1}{2})}dz$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1) + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}) - \frac{1}{32}\ln\frac{3}{2}$$

$$= \dots$$