PARTE A

1. L' integrale
$$\int\int_{\Omega} \max\{|x|, |y|\} dxdy$$
dove
$$\Omega = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$
vale
A: $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B: N.A. C: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

2. Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(1 - \cos^2(xy))$, allora $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0)$ vale
A: 120 B: 192 C: 190 D: -192 E: N.A.

3. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \ln[1 + \sin(x^2 + y^2) + arctg(xy)]$ vale:
A: N.A. B: $\frac{1}{2}$ C: 0 D: 1 E: N.E.

4. Il gradiente della funzione $f(x, y) = |x^3 \cos(xy) + |\sin(xy)||$ nel punto $(0,0)$ vale
A: $(0,0)$
B: N.E. C: $(1,0)$ D: N.A. E: $(0,1)$

5. Sia data la funzione $f(x, y) = \arctan(\sin(x^3y^3))$. Allora il punto $(x, y) = (0,0)$ e':
A: sella B: max relativo C: N.A. D: min relativo ma non min assoluto E: min assoluto

6. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ vale
A: 0 B: N.E. C: -1 D: N.A. E: 1

7. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4-\sin(x^2y^2)}{x^4+y^4}$ vale
A: -1 B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

8. L' integrale $\int\int_{\Omega} \ln(\frac{1+x}{1+y})dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x, y)| \min\{x, y\} > 0, \max\{x, y\} < 1\}$$
vale:
A: 3 B: N.A. C: 2 D: 0 E: 1

9. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} \sin(x^2 + y^2)dxdy$$
dove $\Omega = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq \pi\}$ vale
A: N.A. B: π C: 2π D: $\frac{\pi}{2}$ E: 6π

10. L' area di Ω, dove
$$\Omega = \{(x, y)|2x^2 + 2y^2 \geq 1, |x| + |y| < 1\},$$
vale
A: $2 - \pi$ B: $1 - \pi$ C: $2 - \frac{\pi}{4}$ D: $2 - \frac{\pi}{2}$ E: N.A.

CODICE=373646

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

11 Giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	○	○	●	○	○
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=373646

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 11 Giugno 2018

Cognome: [redacted] ,
Nome: [redacted]

Matricola: [redacted]

Esercizio 1
Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ dove

$$f(x, y) = xy - x - y$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Esercizio 2
Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_\Omega xz dxdydz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 < x < 2, x \cdot z > 0\}.$$

Esercizio 3
Calcolare l'integrale di superficie seguente:

$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \nu_{ext} dS$$

dove $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\Sigma = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, z > \frac{1}{2}\}$ e ν_{ext} indica la normale a Σ che punta verso l'alto.

Es. 1 Osserviamo che $Df(x,y)=(0,0)$

$\Longleftrightarrow (x,y)=(1,1)\notin A$.

Quindi max e min cadono su $\partial\Omega$.

Usando Lagrange $\begin{cases} y-1=2\lambda x \\ x-1=2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

quindi $y=1+2\lambda x$ $\Longrightarrow$ $x(4\lambda^2-1)=-(1+2\lambda)$.

$x=1+2\lambda+4\lambda^2 x$

Pertanto abbiamo due casi

$4\lambda^2-1=0 \Longleftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2} \Longrightarrow (\pm 1,0),(0,\pm 1)$.

$\lambda\neq\pm\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 4\lambda^2-1\neq 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x=-\frac{1}{2\lambda-1} \\ y=-\frac{1}{2\lambda-1} \end{matrix} \Longrightarrow x=y$

$\Longrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Quindi $\min_A f=\min\left\{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), f(0,\pm 1), f(\pm 1,0)\right\}=\boxed{-1}$

e $\max_A f=\max\{\quad\text{"}\quad\}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Es. 2 Si tratta di calcolare $\iiint_\Omega xz \, dx\, dy\, dz$

dove Ω è la palla di raggio 2 con le condizioni $x>0$ e $z>0$.

Quindi usando le sferiche il dominio Ω diventa

$$A = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \in (0,2),\ \varphi \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right),\ \alpha \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \right\}$$

e quindi abbiamo da calcolare

$$\iiint_A \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha \cdot \rho \cos\varphi \, \rho \operatorname{sen}\varphi \, d\alpha \, d\varphi \, d\rho$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \cos\alpha \, d\alpha \right)$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\alpha \right)$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \boxed{\frac{16}{9}}$$

Es. 3 Introducendo il coperchio

$$C = \left\{ (x,y,z) \mid z = \frac{1}{2}, \; x^2+2y^2+\frac{3}{4}=1 \right\}$$

abbiamo

$$\int_{\Sigma} \vec{F}\cdot \nu_{ext}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz - \int_{C} \vec{F}\cdot \nu_{ext}\, dS$$

dove $\Omega = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+2y^2+3z^2 \leq 1, \; z > \frac{1}{2} \right\}$

osserviamo che

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz = 2\iiint_{\Omega} x \, dx\,dy\,dz + 2\iiint_{\Omega} y \, dx\,dy\,dz + 2\iiint_{\Omega} z$$

$$= 2\iiint_{\Omega} z \, dx\,dy\,dz$$

dove i primo due integrali $\iiint x$ e $\iiint y$ sono nulli per ragioni di simmetria

quindi

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} z\,dz \left(\int_{A_z} dx\,dy \right)$$

con $A_z = \left\{ (x,y) \mid x^2+2y^2 \leq 1-3z^2 \right\}$

quindi $\iiint \operatorname{div} \vec{F} = 2 \int^{\frac{1}{\sqrt{3}}} z \frac{1}{\sqrt{2}} \pi (1-3z^2)\,dz = \sqrt{2} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{3}{4} z^4 \right]^{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\frac{1}{2}}$.

quindi resta solo da calcolare

$\int_C \vec{F} \cdot \nu_{ext} \, dS$. Osserviamo che $\nu_{ext} = (0,0,-1)$ su C

e quindi

$$\int_C \vec{F} \cdot \nu_{ext} \, dS = - \int_C z^2 \, dS = -\frac{1}{4} \int_C dS = -\frac{1}{4} \, \text{Area}\left(x^2+2y^2 \leq \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{16\sqrt{2}} .$$

PARTE A

1. La matrice simmetrica $\left[\begin{smallmatrix} -10 & 3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gode della seguente proprieta':

   A: e' indefinita B: N.A. C: e' definita positiva D: e' definita negativa E: $detA = 0$

2. Sia $W = span\{1, x+x^2, 1+2x+2x^2, x^3+x^4, x^4\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 4). Allora ogni endomorfismo $L : W \to \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ soddisfa la seguente proprieta':

   A: non puo' essere suriettivo B: e' necessariamente iniettivo C: e' necessariamente suriettivo D: non puo' essere iniettivo E: N.A.

3. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 7}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 12}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di k) l' applicazione lineare cosi' definita: $Lp(x) = x^5 \cdot p(x)$. Allora $dim(ImL)$ vale:

   A: 12 B: 5 C: 4 D: 7 E: N.A.

4. Siano V^n uno spazio vettoriale di dimensione n e W^m uno spazio vettoriale di dimensione m. Sia $L : V^n \to W^m$ un' applicazione lineare. Allora $d = dim(KerL)$ soddisfa:

   A: $d = 0$ B: $d > \max\{n, m\}$ C: $d \geq n - m$

   D: N.A. E: $d < n - m$

5. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ definito come segue $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Il numero minimo di vettori che serve per completare $\mathcal{C}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ e'

   A: 1 B: 2 C: 0 D: 3 E: N.A.

6. Sia dato un endomorfismo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3, L(e_1-e_2-e_3) = e_1 - e_2 - e_3, L(e_3) = e_3$, (dove e_1, e_2, e_3 base canonica di $\mathbb{R}^3$). Allora L ha per autovalori

   A: N.A. B: $(-1, -1, 1,)$ C: $(-1, -1, -1)$ D: $(-1, 1, 1)$ E: $(1, 1, 1)$

7. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $L(e_1) = e_3$, $L(e_2) = e_2$, $L(e_3) = e_1$, (dove e_1, e_2, e_3 e' la base canconica di $\mathbb{R}^3$). Gli autovalori di L sono:

   A: $(-1, -i, i,)$ B: N.A. C: $(-1, 1, 1)$ D: $(1, 1, 1)$ E: $(1, -i, i)$

8. Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{14}$ tali che $dimV = 8$ e $dimW = 6$. Allora $d = dim(V + W)$ soddisfa necessariamente:

   A: $8 \leq d \leq 14$ B: $d < 14$ C: $d > 8$ D: $d = 14$ E: N.A.

9. Siano date le matrici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Allora $det(A \cdot B^{-1})$ vale

   A: 1 B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: -1 E: 0

10. Sia $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ allora $[A^{-1}]_{2,3}$ (cioe' l' elemneto della matrice inversa di A che si trova sulla seconda riga e la terza colonna) vale

    A: $\frac{1}{8}$ B: N.A. C: $\frac{1}{3}$ D: $\frac{1}{4}$ E: $\frac{1}{2}$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

11 Giugno 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1				X	
2	X				
3					X
4			X		
5			X		
6					X
7			X		
8	X				
9			X		
10					X

CODICE=954236

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 11 Giugno 2018

Cognome: [redacted] ,
Nome: [redacted]

Matricola: [redacted]

Esercizio 1

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcolarne gli autovalori. Dire se A risulta diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

Esercizio 2

Data $A \in mat(2 \times 2)$ provare la seguente equivalenza:

$A \cdot B = B \cdot A, \quad \forall B \in mat(2 \times 2) \iff A = \lambda I_{2\times 2}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si ricorda che $I_{2\times 2}$ indica la matrice identita' 2×2 e $\cdot$ indica il prodotto tra matrici.

Esercizio 3

Sia data la matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (1+k) \end{bmatrix}$.

Dire per quali valori di k esiste almeno un vettore $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$A_k \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Per tali valori di k calcolare le relative soluzioni $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Es. 1

Scriviamo il polinomio caratteristico:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -3 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1-3) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

quindi abbiamo tre autovalori $1, 2, -2$ distinti. Ciò implica A diagonalizzabile.

Per trovare la matrice M basta trovare i relativi autovettori.

AUTOVETTORE PER $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} -3z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{matrix} \iff z=0,\ x=-y$$

quindi possiamo prendere autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

AUTOVETTORE PER $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x=0 \\ y-3z=0 \\ -x-y+3z=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=0 \\ y=3z \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi possiamo scegliere come autovettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

AUTOVETTORE PER $\lambda=-2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} -3x=0 \\ -3y-3z=0 \\ -x-y-z=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=0 \\ y=-z \end{matrix}$$

quindi possiamo

Scegliamo ora $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per ipotesi $\boxed{a = d}$.

Quindi concludiamo che necessariamente

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es. 2

È ovvio che $A = \lambda I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow A \cdot B = B \cdot A \qquad \forall B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Infatti

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \lambda Id_{2\times 2} \cdot B = B \lambda Id_{2\times 2} \qquad \forall B \in Mat(2\times 2)$$

Viceversa osserviamo che se scegliamo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per ipotesi $\boxed{c = b = 0}$.

Es. 3

osserviamo che se $\det A_K \neq 0$ allora $\exists! \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

t.c. $A_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

È chiaro che $\det A_K \neq 0 \iff K+1 \neq 0 \iff K \neq -1$

In tal caso

$$A_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ (1+K)x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x_1 = x_3 = -\dfrac{1}{K+1} \\ x_2 = 1 - x_3 = 1 + \dfrac{1}{K+1} \\ \quad = \dfrac{K+2}{K+1} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K+1} \\ \frac{K+2}{K+1} \\ -\frac{1}{K+1} \end{pmatrix}.$$

Se invece $K = -1$ allora il sistema si riduce a

$$\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 0 \quad = -1 \end{array} \Longrightarrow \text{impossibile!}$$