Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

Useremo la notazione seguente :

- $\mathbb{R}^n$ è lo spazio euclideo di dimensione n:
$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ : \ x_k \in \mathbb{R} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$
- $\mathbb{Q}^n$ è l'insieme dei punti con coordiante razionali in $\mathbb{R}^n$
$$\mathbb{Q}^n = \Big\{(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \ : \ q_k \in \mathbb{Q} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$
- Se x e y sono due punti di $\mathbb{R}^n$ con coordinate
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$
allora $x + y$ e $x - y$ sono i punti con coordinate
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \qquad \text{e} \qquad x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$
- Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora definiamo la norma Euclidea $|x|$ come
$$|x| := \Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2\Big)^{1/2}.$$
- La funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita come
$$d(x, y) = |x - y|,$$
è una distanza su $\mathbb{R}^n$, ossia valogono le proprietà seguenti:
  (1) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ha che $|x - y| \geq 0$. Inoltre, $|x - y| = 0$ se e solo se $x = y$.
  (2) Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, vale la disuguaglianza triangolare
$$|x - y| + |y - z| \geq |x - z|.$$
- Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$, indichiamo con $B_r(x)$ la palla centrata in x di raggio r.
$$B_r(x) := \Big\{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - y| < r\Big\}.$$
- Diciamo che la successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^n$, se
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x_\infty| = 0,$$
ossia se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$$|x_k - x_\infty| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad k \geq N.$$

Proposizione 1. *L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ ossia per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto con coordinate razionali $q \in \mathbb{Q}^n$ tale che $|x - q| < \varepsilon$.*

Proposizione 2. *Se $x_k \in \mathbb{R}^n$ è una successione che converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^n$, allora*
$$\lim_{k\to\infty} |x_k| = |x_\infty|.$$

Le due nozioni di prodotto in $\mathbb{R}^n$.

Per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni numero reale $t \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto $tx \in \mathbb{R}^n$ del vettore x con il numero reale t come

$$tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Inoltre, per ogni

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiamo il prodotto scalare tra x e y come

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Proposizione 3 (Proprietà del prodotto scalare)**.**

(i) *per ogni* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

(ii) *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *si ha che*

$$(tx) \cdot y = x \cdot (ty) = t(x \cdot y);$$

(iii) *per ogni* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

(iv) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$x \cdot x = |x|^2.$$

(v) *per ogni* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Teorema 4. *Siano*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$*. Allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz*

$$|x||y| \geq |x \cdot y|.$$

dove $x \cdot y$ *è il prodotto scalare tra* x *e* y*.*

Dimostrazione: È sufficiente considerare il caso $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Considerare la funzione

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = |x + ty|^2.$$

Calcolare il minimo della funzione su $[0, 1]$. Concludere.

Dimostrazione della disuguaglianza triangolare

Teorema 5. *Siano*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$*. Allora vale la disuguaglianza triangolare*

$$|x| + |y| \geq |x + y|.$$

Dimostrazione: Sviluppare $|x + y|^2$. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, mostrare che $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

Definizione 6 (Insieme aperto)**.** *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che A è aperto se vale la proprietà seguente. Per ogni $x \in A$ esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Inoltre, per definizione, l'insieme vuoto $\emptyset$ è un aperto.*

Teorema 7 (Unione e intersezione di aperti)**.**

(i) L'intersezione di due insiemi aperti à un aperto.

(ii) L'unione di una famiglia di insiemi aperti è un aperto.

Dimostrazione: Segue dalla definizione.

Esempio 8.

(1) Un intervallo aperto, della forma (a, b), è un aperto di $\mathbb{R}$.

(2) Gli intervalli della forma $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ NON sono insiemi aperti in $\mathbb{R}$.

(3) Il quadrato $(0, 1) \times (0, 1)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$. (vedi Proposizione 12)

(4) L'insieme $[0, 1) \times (0, 1)$ NON è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione: (1), (2) e (3) seguono dalla definizione.

Proposizione 9. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $r > 0$, la palla $B_r(x)$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione: Vedi il lemma sotto.

Lemma 10. *Siano $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^d$ tali che $y \in B_r(x)$. Allora*

$$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \qquad \text{per ogni} \qquad 0 < \varepsilon \leq r - |x - y|.$$

Soluzione: Usare la disuguaglianza triangolare.

Proposizione 11.

(i) L'unione di una famiglia qualsiasi di palle aperte $\Big\{B_{r_i}(x_i)\Big\}_{i\in\mathcal{I}}$ è un aperto.

(ii) Ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^d$ è unione di palle aperte.

(iii) Ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^d$ è unione di una famiglia di palle $\Big\{B_{r_i}(q_i)\Big\}_{i\in\mathcal{I}}$ con raggi razionali ($r_i \in \mathbb{Q}$, $r_i > 0$) e centri con coordinate razionali ($q_i \in \mathbb{Q}^n$).

Dimostrazione: (i) segue da Teorema 7. (ii) segue dalla definizione. Per dimostrare (iii) usare il lemma sopra.

Proposizione 12 (esercizio)**.** *Se A_1, $A_2, \dots, A_d$ sono insiemi aperti di $\mathbb{R}$, allora l'insieme prodotto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d$ è un aperto di $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione: Prima dimostrare che ogni cubo $(-\varepsilon+x_1, \varepsilon+x_1)\times(-\varepsilon+x_2, \varepsilon+x_2)\times\cdots\times(-\varepsilon+x_d, \varepsilon+x_d)$ contiene una palla di raggio ε. Poi usare questo risultato per concludere.

Proposizione 13 (esercizio)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che l'insieme*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\Big\}$$

è un aperto in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione: Usare la definizione di funzione continua.

Definizione 14. *Diciamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è chiuso, se il suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus C$ è un aperto.*

Teorema 15 (Unione e intersezione di chiusi)**.**

(i) L'unione di due insiemi chiusi à un chiuso.

(ii) L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusi è un chiuso.

Esempio 16.

(1) $\mathbb{R}^d$ e l'insieme vuoto $\emptyset$ sono entrambi insiemi chiusi. (usare la definizione)

(2) Gli intervalli della forma $[a, b]$ sono insiemi chiusi in $\mathbb{R}$. (usare la definizione)

(3) Il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$. (Usare il Corollario 18)

(4) L'intervallo (a, b) NON è un chiuso di $\mathbb{R}$. (Usare il teorema 17)

(5) Ogni punto $x \in \mathbb{R}^d$ è un insieme chiuso di $\mathbb{R}^d$ (l'insieme che ha come unico elemento il punto x si indica con $\{x\}$).

Teorema 17. *Sia C un sottoinsieme non-vuoto di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti:*

(a) C è chiuso (nel senso che il suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus C$ è aperto).

(b) Se $x_n \in C$ è una successione che converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^n$, allora $x_\infty \in C$.

Corollario 18. *Se $C_1, C_2, \dots, C_d$ sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}$, allora l'insieme prodotto $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_d$ è un chiuso di $\mathbb{R}^d$.*

Proposizione 19 (esercizio)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:*

(i) l'insieme

$$C = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \le f(x)\Big\}$$

è un chiuso in $\mathbb{R}^2$;

(ii) il grafico di f

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\Big\}$$

è un chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Proposizione 20 (esercizio)**.** *Sia x_n una successione in $\mathbb{R}^d$ che converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^d$. Dimostrare che l'insieme*

$$C = \{x_\infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

è un chiuso di $\mathbb{R}^d$.

Chiusura, parte interna e bordo

Definizione 21. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Definiamo:*

- $\mathring{\Omega}$ *(la parte interna di Ω) come il più grande insieme aperto conenuto in Ω, ossia l'unione di tutti gli aperti contenuti in Ω;*
- $\overline{\Omega}$ *(la chiusura di Ω) come il più piccolo insieme chiuso che contiene Ω, ossia l'intersezione di tutti i chiusi che contengono Ω;*
- $\partial\Omega$ *(il bordo di Ω) come l'insieme*
$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}.$$

Teorema 22. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora:*

$$\overline{\Omega} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \ :\ \text{esiste una successione di punti } x_n \in C \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = x \Big\} \ ;$$

$$\mathring{\Omega} = \Big\{ x \in \Omega \ :\ \text{esiste un raggio } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset \Omega \Big\} \ ;$$

$$\partial\Omega = \Big\{ x \in \Omega \ :\ \text{per ogni raggio } r > 0 \text{ si ha che } B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) \neq \emptyset \Big\} \ .$$

Esercizio 23 (esercizio)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Si mostri che $\partial\Omega$ è un insieme chiuso.*

Esercizio 24 (esercizio)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Si mostri che $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$.*

Esercizio 25 (fatto a lezione)**.** *Sia $B_r(x)$ una palla in $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che:*

(a) $\overline{B_r(x)} = \Big\{ y \in \mathbb{R}^d \ :\ |x-y| \leq r \Big\}$;

(b) $\partial B_r(x) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^d \ :\ |x-y| = r \Big\}$.

Esercizio 26 (esercizio)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e siano*

$$A = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y < f(x) \Big\}, \qquad C = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \leq f(x) \Big\}.$$

$$\Gamma = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y = f(x) \Big\}.$$

Si mostri che :

(i) $\Gamma = \partial A = \partial C$;

(ii) $\overline{A} = C$ *and* $\mathring{C} = A$.

Esercizi sulla chiusura, parte interna e bordo (dalla lezione di 1/4/20)

Esercizio 27. *Trovare un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tale che:*

(1) $\mathring{\Omega} = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(2) $\partial\Omega = B_1(0)$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(3) $\partial\Omega = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(4) $\partial\Omega = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(5) $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

Esercizio 28.

(1) Dire se è vero che $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ *per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

(2) Dire se è vero che $\partial\Omega = \partial\mathring{\Omega}$ *per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Esercizio 29. *Trovare un controesempiuo all'affermazione seguente.*
Per ogni coppia di insiemi aperti disgiunti $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ vale una delle proprietà seguenti.

(a) $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ *e* $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

(b) esistono due punti x_1 e x_2 tali che $x_1 \in \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_2$ e $x_2 \in \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_1$.

Insiemi compatti in $\mathbb{R}^d$

Definizione 30. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e sia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che la famiglia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è un* **ricoprimento** *di K se*

$$K \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i.$$

Diciamo inioltre che $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è un **ricoprimento aperto** *se tutti gli insiemi A_i sono aperti. Diciamo che il ricoprimento è* **finito** *se il numero degli insiemi A_i è finito.*

Definizione 31. *Diciamo che $\{A_j\}_{i\in\mathcal{J}}$ è un* **sottoricoprimento** *di $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, se ogni insieme A_j della famiglia $\{A_j \;:\; j\in\mathcal{J}\}$ appartiene anche alla famiglia $\{A_i \;:\; j\in\mathcal{I}\}$.*

Definizione 32. *Diciamo che un insieme $K\subset\mathbb{R}^d$ è* **compatto** *se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Definizione 33. *Diciamo che un insieme $\mathcal{I}$ è numerabile, se esiste una funzione* **surgettiva**

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{I}.$$

Proposizione 34 (dim. a lezione)**.**

(1) $\mathcal{N}$ è numerabile;

(2) ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile;

(3) $\mathcal{Z}$ è numerabile;

(4) se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sono numerabili, allora il prodotto $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ è numerabile;

(5) $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile;

(6) $\mathbb{Q}^d$ è un insieme numerabile;

*(7) Sia $\mathcal{I}$ l'insieme di tutte le palle $B_r(x)$ in $\mathbb{R}^d$ con centro $x \in \mathbb{Q}^d$ e raggio $r \in \mathbb{Q}$.
Allora $\mathcal{I}$ è numerabile.*

Proposizione 35 (dim. a lezione)**.** *Sia $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ e sia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un ricoprimento di $\mathcal{K}$ con insiemi aperti $A_i \subset \mathbb{R}^d$:*

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i.$$

Allora esiste un sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{K}$, ossia esiste una successione di aperi A_n tale che

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \textit{e} \qquad A_n \in \{A_i \ : \ i \in \mathcal{I}\} \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il prossimo teorema è una propreità notevole dei numeri reali.

Teorema 36 (esercizio)**.** *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

Teorema 37. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.*

(i) *K è compatto;*

(ii) *K è chiuso e limitato;*

(iii) *ogni successione $x_n \in K$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un limite in K.*

Definizione 38. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che l'insieme $A \subset X$ è relativamente aperto in X se esiste un aperto $\widetilde{A}$ in $\mathbb{R}^d$ such that $A = X \cap \widetilde{A}$.*

Proposizione 39. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed A un sottoinsieme di X. Allora A è relativamente aperto in X, se e solo se per ogni $x \in A$ esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap X = B_r(x) \cap A$.*

Definizione 40. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : X \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Diciamo che f è continua su X, se vale l'implicazione seguente. Se $A \subset \mathbb{R}^m$ è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è relativamente aperto in X.*

Proposizione 41. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : X \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Allora sono equivalenti:*

(i) *f è continua;*

(ii) *se $x_n \in X$ è una successione che converge ad un certo $x_\infty \in X$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty).$$

(iii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $y \in B_\delta(x) \cap X$, allora $f(y) \in B_\varepsilon\big(f(x)\big)$.*

Proposizione 42. *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora, l'insieme $f(K)$ è compatto.*

Corollario 43. *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f ammette un massimo ed un minimo su K.*

Proposizione 44. *La composizione di due funzioni continue è continua.*

Proposizione 45. *Se $f : X \to \mathbb{R}^m$ è continua e $Y \subset X$, allora $f : Y \to \mathbb{R}^m$ è continua.*

Definizione 46. *Diciamo che l'insieme* $X \subset \mathbb{R}^d$ *è* **connesso** *se* <u>*non esistono*</u> *due aperti* A_1 *e* A_2 *in* $\mathbb{R}^d$ *tali che:*

- $A_1 \cap X \neq \emptyset$ *e* $A_2 \cap X \neq \emptyset$*;*
- A_1 *e* A_2 *sono disgiunti:* $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$*;*
- $X \subset A_1 \cup A_2$.

Esempio 47.

- *L'insieme* $\{x\}$ *è connesso, per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$.
- *L'insieme* $\{x\} \cup \{y\}$ *è sconnesso, per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tali che* $x \neq y$.
- *Siano* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *due punti a distanza almeno* 3*. Allora, l'insieme* $\overline{B}_1(x) \cup \overline{B}_1(y)$ *è sconnesso.*
- *Gli intervalli* $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b) *e* $(a, b]$ *sono connessi in* $\mathbb{R}$ *(ragionare per assurdo).*

Esercizio 48. *Sia* $X \subset \mathbb{R}$ *un insieme. Allora,* X *è connesso se e solo se* X *è un intervallo.*

Soluzione: Ormai sappiamo che tutti gli intervalli sono insiemmi connessi. Ci rimane da dimostrare che se X è un insieme connesso, allora X è necessariamente un intervallo.

1. Mostrare che se $x, y \in X$, $x < y$, allora l'intervallo $[x, y] \subset X$.
2. Come conseguenza dal punto precedente, dimostrare che se $\inf X < t < \sup X$, allora $t \in X$.

Definizione 49. *Diciamo che un insieme* $X \subset \mathbb{R}^d$ *è* **connesso per archi (c.p.a.)** *se per ogni coppia di punti* $x, y \in \mathbb{R}^d$*, esiste una funzione (un arco) continua* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ *tale che*

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma(1) = y, \qquad \gamma(t) \in X \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, 1].$$

Proposizione 50 (c.p.a. $\Rightarrow$ connesso)**.** *Sia* $X \subset \mathbb{R}^d$*. Dimostrare che se* X *è connesso per archi, allora è anche connesso.*

Proposizione 51. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme aperto. Dimostrare che* A *è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Soluzione: Sia $x_0 \in A$. Consideriamo la famiglia di tutti gli insiemi

- aperti,
- contenuti in A,
- connessi per archi,
- che contengono x_0.

Dimostrare che l'unione A_1 di tutti questi insiemi è un aperto connesso per archi e contenuto in A. Supponiamo che $A \neq A_1$. Mostrare che per ogni $x \in A \setminus A_1$, esiste $B_r(x) \subset A$ tale che $B_r(x) \cap A_1 = \emptyset$. Sia A_2 l'unione di tutte queste palle aperte. Mostrare che la coppia A_1, A_2 sconnette A.