Serie alternate

Teorema 1 (Criterio di Cauchy per le serie). *Sia $(a_k)_{k\geq 1}$ una successioni di numeri reali o complessi, con la seguente proprietà (detta di Cauchy): per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad n, m \geq N.$$

Allora la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

Teorema 2. *Siano $(a_k)_{k\geq 1}$ e $(b_k)_{k\geq 1}$ due successioni di numeri reali o complessi. Supponiamo che:*

(a) La successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che

$$|S_n| \leq M \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) La successione $(b_n)_{n\geq 1}$ è monotona decrescente e infinitesima, cioè

$$b_n \geq b_{n+1}, \ \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}, \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Allora, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ converge.

Dimostrazione: L'obiettivo è mostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ ha la proporietà di Cauchy. Suggerimento: usare l'identità

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k.$$

Teorema 3. *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali, tale che:*

(a) $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$;

(b) la successione è monotona: $a_n \geq a_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(c) la successione è infinitesima: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Esercizio 4. *Dimostrare che le serie convergono.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Esercizio 5. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 2k\pi$, un numero reale dato. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.*

Suggerimento: $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.