

Principali definizioni, formule e teoremi da sapere

Gli enunciati completi si trovano nelle dispense sul sito del corso.

I risultati segnati con ★ sono particolarmente importanti.

Questo elenco contiene soltanto i risultati principali; tutto quello che abbiamo fatto a lezione o si trova sul sito del corso fa parte del programma.

Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n

- Definizione della norma Euclidea di un vettore in \mathbb{R}^n .
- Definizione della distanza fra due punti in \mathbb{R}^n .
- Prodotto scalare in \mathbb{R}^n - definizione e proprietà
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- Disuguaglianza triangolare in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- Convergenza di una successione in \mathbb{R}^n - definizione
- \mathbb{Q}^n è denso in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.

Elementi di topologia in \mathbb{R}^n

- Insiemi aperti - definizione
- L'unione di insiemi aperti è un aperto - con dimostrazione
- L'intersezione di due insiemi aperti è un aperto - con dimostrazione
- Il prodotto di intervalli (o insiemi) aperti in \mathbb{R} è un aperto in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
- Insiemi chiusi - definizione
- L'unione di due insiemi chiusi è un chiuso - con dimostrazione
- L'intersezione di insiemi chiusi è un chiuso - con dimostrazione
- Chiuso \Leftrightarrow chiuso per successioni - con dimostrazione
- Il prodotto di intervalli (o insiemi) chiusi in \mathbb{R} è un chiuso in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
- Chiusura, parte interna e bordo - definizione e Teorema 22 - con dimostrazione
- Insiemi numerabili - definizione
- Ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile - con dimostrazione
- Insiemi compatti - definizione
- ★ Teorema (definizioni equivalenti di un insieme compatto in \mathbb{R}^n) - con dimostrazione
- Funzioni continue definite su sottoinsiemi di \mathbb{R}^n - definizione
- Funzioni continue - definizioni equivalenti (ε - δ e per successioni) - con dimostrazione

- ★ Le funzioni continue mandano insiemi compatti in insiemi compatti - con dimostrazione
- Teorema di Weierstrass - con dimostrazione
- Funzioni continue a valori vettoriali - definizioni equivalenti (ε - δ , per successioni, è continuità delle componenti) -con dimostrazione.
- La composizione di funzioni continue è continua - con dimostrazione
- Aperti connessi per archi - definizione
- Teorema del valore intermedio su insiemi connessi per archi - con dimostrazione
- ★ Teorema: Un aperto è connesso per archi se e solo se è connesso (= non è unione di due aperti disgiunti non-vuoti) - con dimostrazione

Funzioni derivabili

- ★ Funzioni derivabili e derivate parziali in un punto - definizione
- ★ Gradiente e matrice Hessiana - definizione
- Funzioni C^1 e C^2 - definizione
- Somma e prodotto di funzioni derivabili
- ★ Teorema: Le funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso sono costanti - con dimostrazione
- ★ Derivate parziali seconde - Teorema di Schwarz - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Esempio di una funzione derivabile, ma non continua

Insiemi convessi e funzioni convesse

- Definizione di insieme convesso
- Definizione di funzione convessa
- Teorema: Le funzioni convesse sono continue - con dimostrazione in dimensione due

Polinomi di più variabili

- Teorema: I polinomi nulli hanno coefficienti nulli - con dimostrazione in dimensione 1 e 2
- Grado di un polinomio - definizione
- Principio di identità tra polinomi di una variabile
- Polinomi omogenei - definizione
- Caratterizzazione dei polinomi omogenei di due variabili (Prop. 28 del file sui polinomi)
- Gradiente e matrice Hessiana di un polinomio
- Sviluppo di Taylor al primo ed al secondo ordine in zero - con dimostrazione

- Teorema: Un polinomio è convesso se e solo se la sua matrice Hessiana è non-negativa (Prop. 41 del file) - con dimostrazione

Funzioni differenziabili

- Funzioni differenziabili - definizione
- Le funzioni differenziabili sono derivabili
- Le funzioni differenziabili sono continue
- ★ Teorema del differenziale - se una funzione è derivabile e le sue derivate parziali sono continue, allora la funzione è differenziabile - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Formule per la derivazione di una funzione composta - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Esempio di una funzione continua e derivabile in zero, ma non differenziabile in zero.
 - Funzioni 1-omogenee - definizione
 - Caratterizzazione delle funzioni 1-omogenee differenziabili in zero - con dimostrazione
 - Interpretazione geometrica della differenziabilità (in zero)
- ★ Teorema di Taylor al secondo ordine - con dimostrazione in dimensione due
 - Massimi e minimi relativi all'interno di un insieme aperto - condizione al primo ordine
- ★ Massimi e minimi relativi - condizioni necessarie e sufficienti al primo ordine in dimensione due - con dimostrazioni
 - Matrice Hessiana, matrici definite positive/negative e semidefinite positive/negative. Determinante. Metodo per determinare se una matrice 2×2 è (semi)definita positiva/negativa in dimensione due.

Teorema della funzione implicita

- ★ Teorema della funzione implicita in dimensione due - con dimostrazione
- ★ Teorema dei moltiplicatori di lagrange - con dimostrazione in dimensione due

Funzioni differenziabili a valori vettoriali

- ★ Funzioni differenziabili a valori vettoriali - definizione
 - Le funzioni differenziabili sono continue
- ★ Caratterizzazione delle funzioni differenziabili - differenziabilità delle componenti - con dimostrazione
 - Teorema del differenziale per funzioni a valori vettoriali - con dimostrazione
 - Somma e prodotto scalare di funzioni differenziabili - con dimostrazione
- ★ Composizione di funzioni differenziabili - con dimostrazione
 - Diffeomorfismi in \mathbb{R}^2 - definizione
 - Teorema della funzione inversa in \mathbb{R}^2

Equazioni differenziali ordinarie

- Funzioni lipschitziane - definizione
- ★ Teorema: Le funzioni di classe C^1 sono (localmente) lipschitziane - con dimostrazione
- Teorema: Unicità delle soluzioni - con dimostrazione
- Convergenza uniforme su un intervallo - definizione
- Teorema: Limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua - con dimostrazione
- Successioni di Cauchy - definizione
- ★ Teorema: Le successioni di Cauchy convergono - con dimostrazione
- ★ Teorema di Cauchy - con dimostrazione
- Intervallo massimale di esistenza
- ★ Le funzioni seno e coseno come soluzioni di un sistema di equazioni differenziali - le soluzioni sono periodiche - con dimostrazione
- Curve rettificabili e lunghezza di una curva - definizione
- ★ Teorema: Le curve C^1 sono rettificabili - con dimostrazione
- Coordinate polari - definizione
- Soluzioni di equazioni differenziali in coordinate polari

Forme differenziali

- 1-forme, 2-forme e k -forme ($k \in \mathbb{N}$) in \mathbb{R}^n - definizione e operazioni con le forme differenziali - somma di forme differenziale, prodotto di una forma differenziale con una funzione.
- Prodotto esterno di forme differenziali - definizione e proprietà
- Derivata esterna di una forma differenziale - definizione e proprietà
- Forme esatte e forme chiuse - definizione
- ★ Teorema 19. Le forme esatte sono chiuse - con dimostrazione per le 1-forme in dimensione 2.
- ★ Teorema 20. Le forme esatte sono chiuse - con dimostrazione per le 2-forme in dimensione 3.
- ★ Esempio di una forma chiusa ma non esatta

Curve e integrali curvilinei

- Definizione di una curva C^1 a tratti
- Definizione di una curva chiusa
- Definizione di una curva semplice
- Definizione di γ_-
- Concatenamento di curve - definizione

- Integrale di una funzione su una curva - definizione
- Curve equivalenti - definizione
- L'integrale non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione
- Integrazione di 1-forme su curve - definizione
- L'integrale di una 1-forma non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione
- ★ Integrazione di una 1-forma esatta su una curva - con dimostrazione
- ★ Teorema di derivazione sotto il segno dell'integrale - con dimostrazione
- ★ In un rettangolo le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due
- ★ In un aperto stellato le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due.
- Insiemi semplicemente connessi - definizione
- Teorema dell'integrazione di 1-forme chiuse su curve omotope - con dimostrazione
- Su un semplicemente connesso tutte le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione
- Diffeomorfismi e pull-back di una 1-forma - definizioni
- Il pull-back di una 1-forma chiusa è una 1-forma chiusa - con dimostrazione
- Il toro non è una palla: in dimensione due B_r e $B_R \setminus \{0, 0\}$ non sono diffeomorfi - con dimostrazione.

Integrazione in \mathbb{R}^n

- ★ Integrale di Riemann su rettangoli in \mathbb{R}^n - costruzione in \mathbb{R}^2
 - Criteri di integrazione
- ★ Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Teorema di Cantor su compatti in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
 - Teorema di Fubini su domini rettangolari - senza dimostrazione in dimensione due
 - Definizione di integrale di una funzione su un dominio limitato in \mathbb{R}^n
- ★ Integrabilità di funzioni continue su domini normali - con dimostrazione in dimensione due nel caso $f < g$ su (a, b) .
 - Teorema di Fubini su domini normali - senza dimostrazione
 - Teorema della divergenza in dimensione due - senza dimostrazione
 - Formula di Stokes in \mathbb{R}^2 - senza dimostrazione